سلسلة جنى في الرياضيات

الجبر

إعداد المهندسة / جنى أحمد

الصف / الثالث الاعدادى

الدرس الأول

حاصل الضرب الديكارتى

قبل بداية الدرس نفتكر مع بعض

{أ ، ب} ← مجموعة مكونة من عنصرين هما أ ، ب ويمكن كتابتها {ب ، أ}

أما (أ ، ب) ← زوج مرتب إذا كان أ ≠ ب فإن (أ ، ب) ≠ (ب ، أ) مثلا (٢ ، ٣) ≠ (٣ ، ٢)

← يسمى بالمسقط الأول

← المسقط الثانى

تساوى زوجين مرتبين

إذا كان (أ ، ب) = (س ، ص) فإن أ = س المسقط الأول = المسقط الأول

ب = ص المسقط الثانى = المسقط الثانى

مثال

أوجد قيم أ ، ب فى كل مما يأتى

١) (أ ، ب) = (-٥ ، ٩)

الحل

سهل جدا الأول = الأول ، المسقط الثانى = الثانى

أ = -٥ ، ب = ٩

٢) (٣ ، ب) = (أ ، ٥)

أ = ٣ ، ب = ٥

٣) (أ - ٢ ، ب + ١) = (٢ ، -٣)

الحل

أ - ٢ = ٢ ← أ = ٢ + ٢ = ٤

ب + ١ = -٣ ← ب = -٣ - ١ = -٤

٤) (أ - ٧ ، ٢٦) = (-٢ ، ب^{٣} - ١)

الحل

أ - ٧ = -٢ ← أ = -٢ + ٧ = ٥

٢٦ = ب^{٣} - ١ ← ب^{٣} = ٢٦ + ١

∴ ب^{٣} = ٢٧ ← ب = ∛٢٧ = ٣

٥) (٣٢ ، أ + ب) = (ب^{٥} ، ٢)

الحل

٣٢ = ب^{٥} ← ٢^{٥} = ب^{٥}

∴ ب = ٢

أ + ب = ٢ ← بالتعويض عن ب = ٢

أ + ٢ = ٢ ← أ = ٢ - ٢ = صفر

٦) (أ^{٢} - ٢ ، ٢ب) = (ب ، ∛٦٤)

الحل

أ^{٢} - ٢ = ب مش هعرف أحلها أجيب ب الأول

٢ب = ∛٦٤ ← ٢ب = ٤ ∴ ب = ٤/٢ = ٢

أعوض بقيمة ب

أ^{٢} - ٢ = ٢ ← أ^{٢} = ٢ + ٢ = ٤ ∴ أ = ±$\boxed{٤}$√

أ = ± ٢

مهندسة / منى أحمد

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين

كلنا عارفين حاصل ضرب $2 \times 3 = 6$

طيب لو عندي $\{2\} \times \{3\}$ هل ده $= 6$ ✗ لا طبعا ده أسمه ضرب ديكارتي يعني أضرب مجموعة ✗ مجموعة : حاصل الضرب عبارة عن مجموعة بين الزوج المرتب $(2 ، 3)$

$\therefore \{2\} \times \{3\} = \{(2 ، 3)\} \leftarrow$ س ✗ ص

الضرب الديكارتي: هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر ينتمي إلى س ومسقطها الثاني عنصر ينتمي إلى ص

سمي بالديكارتي نسبة إلى فيلسوف وعالم الرياضيات الفرنسي (رينيه ديكارت)

مثال إذا كانت س $= \{1 ، 2\}$ ، ص $= \{3 ، 4 ، 5\}$ أوجد س ✗ ص

الحل

هعمل أيه هاخد كل عنصر من المجموعة الأول مع عناصر ص وأعمل أزواج مرتبة ١ ← مرة مع ٣ ، ١ مع ٤ ، ١ مع ٥ وبعدين ٢ مع ٣ ، ٢ مع ٤ ، ٢ مع ٥

س ✗ ص $= \{1 ، 2\} \times \{3 ، 4 ، 5\}$

$= \{(1 ، 3) ، (1 ، 4) ، (1 ، 5) ، (2 ، 3) ، (2 ، 4) ، (2 ، 5)\}$

سؤال هل س ✗ ص = ص ✗ س تعالوا نشوف

ص ✗ س $= \{3 ، 4 ، 5\} \times \{1 ، 2\}$ نأخذ ٣ مع كل العناصر س بعدين ٤ بعدين ٥

$= \{(3 ، 1) ، (3 ، 2) ، (4 ، 1) ، (4 ، 2) ، (5 ، 1) ، (5 ، 2)\}$

نستنتج أن س ✗ ص $\neq$ ص ✗ س حيث س $\neq$ ص

طيب لو عايز س ✗ س

س ✗ س $= \{1 ، 2\} \times \{1 ، 2\} = \{(1 ، 1) ، (1 ، 2) ، (2 ، 1) ، (2 ، 2)\}$

بدل إما أقول س ✗ س ممكن أقول $س^2$ ويقرأ (س اثنين)

مهندسة:جنى أحمد

ملاحظات

[1] س ✗ $\phi = \phi$ ✗ س $= \phi$

[2] إذا كان (أ ، ب) $\in$ س ✗ ص فإن أ $\in$ س ، ب $\in$ ص مثال (٣ ، ٤) $\in$ س ✗ ص فإن ٣ $\in$ س ، ٤ $\in$ ص

[3] نرمز لعدد عناصر أي مجموعة بالرمز ن

إذا كان ن(س) = ٣ أي أن عدد عناصر المجموعة س = ٣ ، ن(ص) = ٤ فإن ن(س ✗ ص) = ٣ ✗ ٤ = ١٢

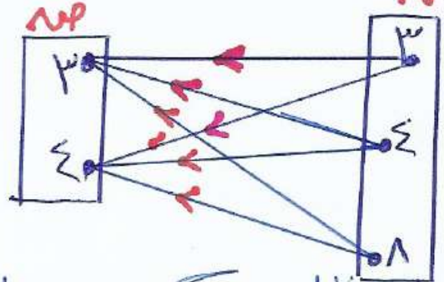
تمثيل حاصل الضرب الديكارتي

إذا كانت س = {٣، ٤، ٨} ، ص = {٣، ٤} أوجد س × ص ، ص × س ، ص × ص ومثلهم ① بالمخطط السهمي ② بالمخطط البياني

الحل

1) س × ص = {٣، ٤، ٨} × {٣، ٤} = {(٣، ٣)، (٣، ٤)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٨، ٣)، (٨، ٤)}

المخطط السهمي

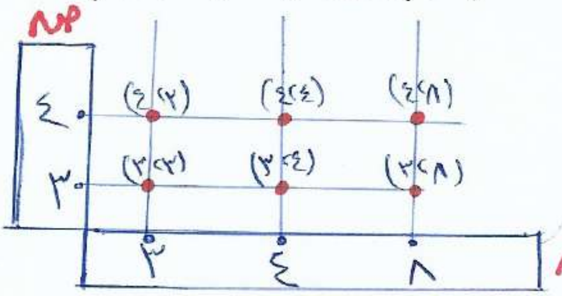


سهم خالص بيرسم سهم من المسقط الاول رايح للمسقط الثاني

ن(س) = ٣ ، ن(ص) = ٢

∴ ن(س × ص) = ٣ × ٢ = ٦ لو عدتهم هيطلعوا ٦

المخطط البياني أو الديكارتي



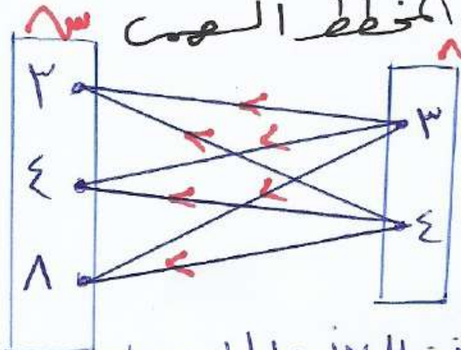
أفقي المسقط الأول (عناصر المجموعة الأولى)

رأسي المسقط الثاني (عناصر المجموعة الثانية)

نقط التقاطع تمثل الأزواج المرتبة لـ س × ص

2) ص × س = {٣، ٤} × {٣، ٤، ٨} = {(٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٨)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٨)}

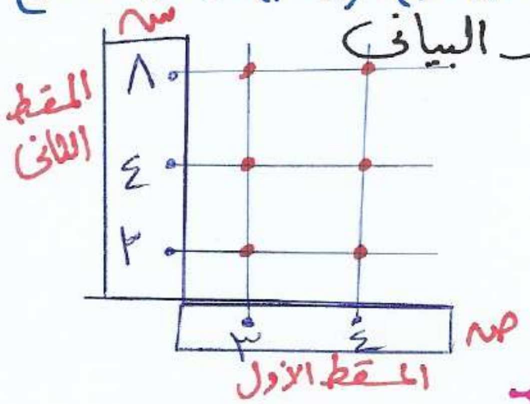
المخطط السهمي



بأخذ الـ ٣ وأوصلها بجميع عناصر س مثلهم وأيضا ٤

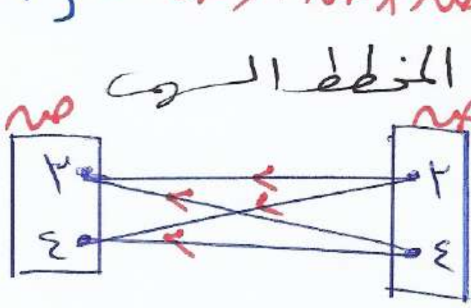
ن(ص × ص) = ٦

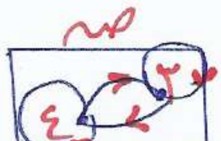
المخطط البياني



3) ص × ص أو ص² = {٣، ٤} × {٣، ٤} = {(٣، ٣)، (٣، ٤)، (٤، ٣)، (٤، ٤)}

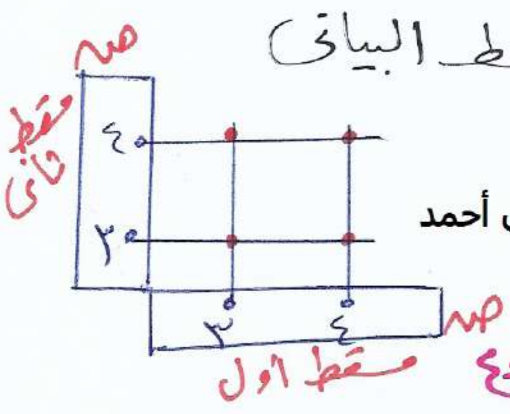
المخطط السهمي





عكسه تمثله كده إرسال ٣ ده معناه السهم خارج من النقطة وبينتهي عند نفس النقطة (٣ راحة لنفسها)

المخطط البياني



مهندسة:جنى أحمد

ن(ص × ص) = ٢ × ٢ = ٤

مثال: إذا كان س × ص = {(١،١)، (١،٣)، (١،٥)} أوجد س ، ص ، ص × س ، ص²

الحل

هنا معطى العكس وعايز المجموعة نفسها س ، ص ومن السهل س أجيبها من المسقط الأول ، ص من المسقط الثاني لأنه معطى س × ص

∵ س × ص = {(١،١)، (١،٣)، (١،٥)}

س ← المسقط الأول ١،١،١ يبقى س = {١} مش علشان مينفعش بتكرر

∴ س = {١}

ص ← المسقط الثاني ١،٣،٥ تمام

ص = {١،٣،٥}

ص × س = {١،٣،٥} × {١} = {(١،١)، (٣،١)، (٥،١)}

ص² = ص × ص = {١،٣،٥} × {١،٣،٥} = {(١،١)، (١،٣)، (١،٥)، (٣،١)، (٣،٣)، (٣،٥)، (٥،١)، (٥،٣)، (٥،٥)}

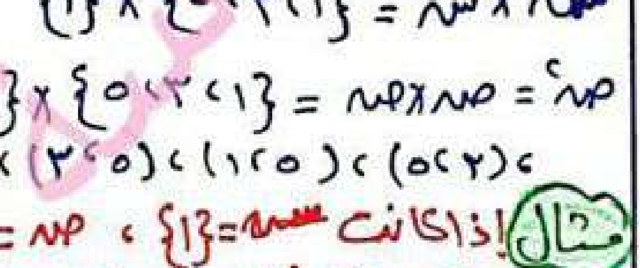
مثال: إذا كانت س = {١} ، ص = {٢،٣} ، ع = {٢،٥،٦} مثل المجموعات س ، ص ، ع فن ثم أوجد (س × ص) ∪ (ص × ع) ، س × (ص ∩ ع) ، (س × ص) ∩ (س × ع) ، (ع − ص) × (س ∪ ص) ← حاول تحلها

الحل

قبل ما ارسم شكل فن نشوف الأول في مشترك بين المجموعات أم لا

س ∩ ص = ∅ تمام ص ∩ ع = {٢} يبقى آخد بالي وانا برسم

س هتبقى لوحدها ، ص ، ع مشتركين مع بعضهما؟



١) (س × ص) ∪ (ص × ع) نخلص جزء جزء وبعدين أجيب الاتحاد

س × ص = {(١،٢)، (١،٣)}

ص × ع = {(٢،٢)، (٢،٥)، (٢،٦)، (٣،٢)، (٣،٥)، (٣،٦)}

∴ (س × ص) ∪ (ص × ع) = {(١،٢)، (١،٣)، (٢،٢)، (٢،٥)، (٢،٦)، (٣،٢)، (٣،٥)، (٣،٦)}

الاتحاد يعني كلهم بدون تكرار

٢) س × (ص ∩ ع) نجيب الأول ص ∩ ع وبعدين نعمل الضرب ص ∩ ع = {٢}

∴ س × (ص ∩ ع) = س × {٢} = {١} × {٢} = {(١،٢)}

٣) (س × ص) ∩ (س × ع) نجيب الضرب وبعدين اعمل تقاطع

س × ص = {(١،٢)، (١،٣)} س × ع = {(١،٢)، (١،٥)، (١،٦)}

∴ (س × ص) ∩ (س × ع) = {(١،٢)}

تقاطع يعني المشترك

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعة غير منتهية

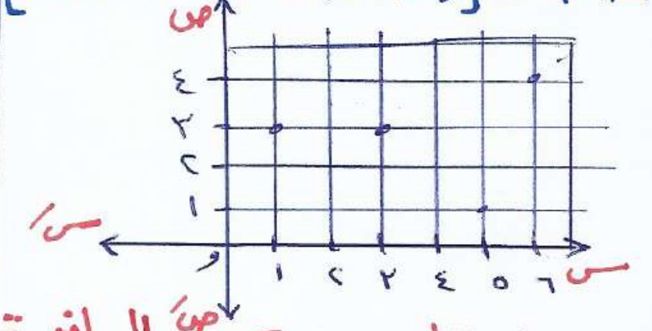
إذا كانت س مجموعة منتهية عدد عناصرها ن فإن س × س مجموعة منتهية أيضاً عدد عناصرها هو ن × ن = ن²

أما إذا كانت س مجموعة غير منتهية فإن س × س تكون غير منتهية أيضاً ويمثل بمخطط بياني يتكون من عدد غير منتهٍ من النقط

حاصل الضرب الديكارتي ط × ط

حيث ط = {٠، ١، ٢، ٣، ......}

ط × ط = {(س، ص) : س ∈ ط، ص ∈ ط}



ده جزء فقط من الشبكة البيانية لحاصل الضرب الديكارتي

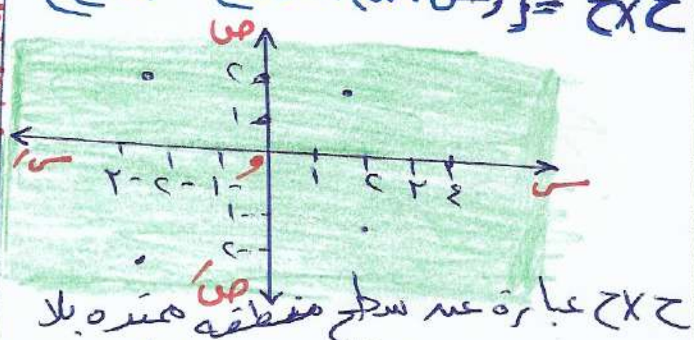
لأن عدد الأزواج المرتبة عدد غير منتهٍ

أي نقطة على الشبكة ∈ ط × ط

حاصل الضرب الديكارتي ح × ح

ح = ن ∪ ن' حيث ن الأعداد النسبية

ح × ح = {(س، ص) : س ∈ ح، ص ∈ ح}

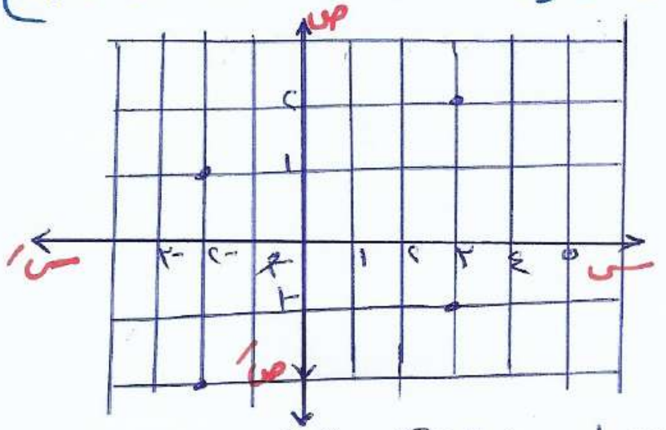


ح × ح عبارة عن سطح منطقة ممتدة بلا حدود وأي نقطة في هذه المنطقة ∈ ح × ح

حاصل الضرب الديكارتي ص × ص

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة = {....، ٣، ٢، ١، ٠، -١، -٢، ....}

ص × ص = {(س، ص) : س ∈ ص، ص ∈ ص}



أي نقطة على الشبكة تمثل زوج مرتب ∈ ص × ص

ملاحظات

١ يسمى المستقيم س س' محور السينات أو المحور الأفقي

٢ ص ص' محور الصادات أو المحور الرأسي

٣ نقطة تقاطع المحورين تسمى بنقطة الأصل

٤ لأي زوج مرتب (س، ص)

س هي المسقط الأول أو الإحداثي السيني

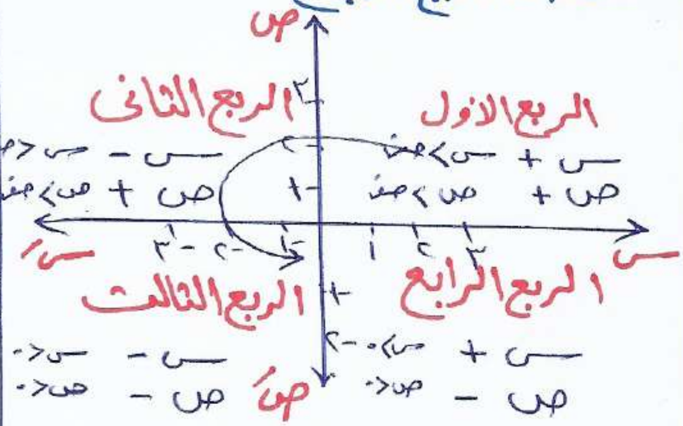
ص " " الثاني " " الصادي

٥ إذا كان الإحداثي السيني للنقطة = صفر فإن النقطة تقع على محور الصادات

٦ إذا كان الإحداثي الصادي للنقطة = صفر فإن النقطة تقع على محور السينات

مهندسة جنى أحمد

٧ المستقيمان س س َ ، ص ص َ يقسمان المستوى إلى أربع أرباع



الربع الأول كل من س ، ص موجبتين (+ ، +)

الربع الثاني س سالب ، ص موجب (- ، +)

الربع الثالث (- ، -)

الربع الرابع (+ ، -)

على محور السينات (س ، صفر)

على محور الصادات (صفر ، ص)

مثال

اذكر الربع أو المحور الذي تقع عليه كل من النقط التالية

١ (٣ ، ٢) الربع الأول (+ ، +)

٢ (٣ ، -٤) الربع الرابع (+ ، -)

٣ (٠ ، ٥) طالما فيه صفر يقع على المحور
محور الصادات

مثال

اذا كانت النقطة (٥ ، ب) تقع على محور السينات فإن ب = ...

محور السينات يبقى الص = صفر ∴ ب = صفر

اذا كانت النقطة (ل - ٧ ، ٥) تقع على محور الصادات فإن ب = ...

محور الصادات ← س = صفر

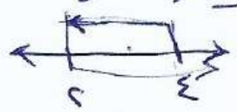
∴ ل - ٧ = صفر ∴ ب = ٧

مثال اذا كانت النقطة (س - ٤ ، ٢ - س) حيث س ∈ ص تقع في الربع الثالث فإن س = ...

في الربع الثالث (- ، -)

الإحداثي الأول س - ٤ < صفر ← س < ٤

الإحداثي الثاني ٢ - س < صفر ← -س < -٢ ∴ س > ٢



س ∈]٢ ، ٤[

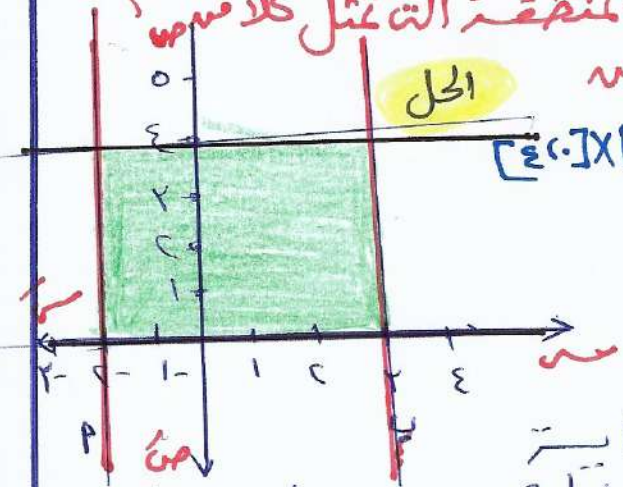
ولكن هو معطى شرط س ∈ ص يبقى عايز عدد صحيح ∴ س = ٣

حاصل الضرب الديكارتي لفترتين

الفترة هي مجموعة جزئية من ح تمام

مثال اذا كانت س = [-٢ ، ٣] ، ص = [٠ ، ٤] أوجد المنطقة التي تمثل كلا من

١ س × ص



عملت ايه؟

أخذت أول مجموعة س على محور السينات وطلعت من عند حدود الفترة بعمودين راسيين أ ، ب مثلا

وبعدين المجموعة الثانية ص أمثلها على محور الصادات وأعمل عند الحدود عمودين أفقي تمام ومنطقة التقاطع هو س × ص

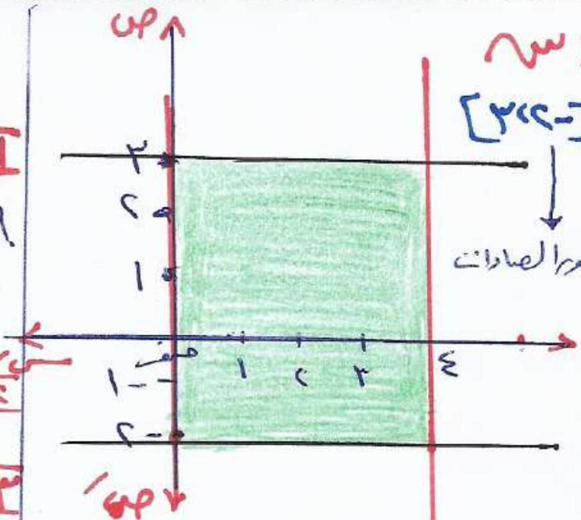
مهندسة جنى أحمد

٢ صه × س

[٠، ٤] × [-٢، ٣]

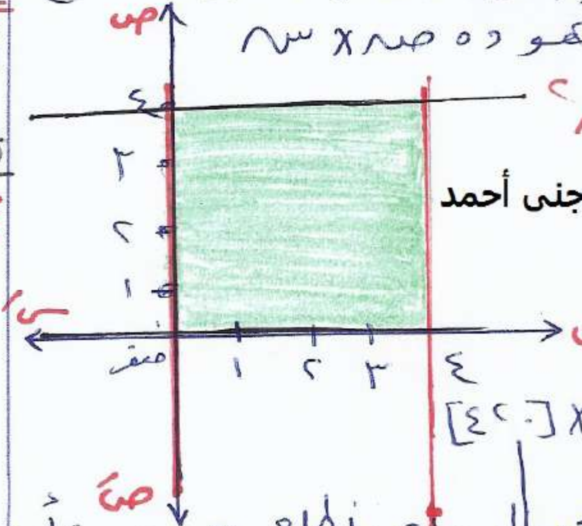
محور السينات

محور الصادات



المجموعة الأولى اللي هي صه على محور السينات [٠، ٤] والثانية على محور الصادات [-٢، ٣] والتقاطع بتاعهم هو ده صه × س

٣ صه^٢



مهندسة:جنى أحمد

[٠، ٤] × [٠، ٤]

صه على محور السينات واطلع بعمودية رأسية وهكذا عند محور الصادات (أفقي)

هل النقاط (-١، ٣) ∈ × صه^٢

(١، ٣) ، (٥، ١) ×

(٣، ٦) × ، (١، ١)

(١، ٣) ، (١، ١) هما فقط ينتموا إلى صه × صه

** إذا كان ن(س) = ٣ ، ن(س×صه) = ١٢

فإن ن(صه) = ______

ن(س×صه) = ن(س) × ن(صه)

١٢ = ٣ × ن(صه) ← ن(صه) = ٤

* إذا كان ن(س) = ٢ ، صه = {١، ٢} فإن ن(س×صه) = ن(س) × ن(صه) = ٢×٢ = ٤

تمارين

١ أكمل

إذا كان (س - ١، ١٣) = (٨، ص - ٣) فإن $\sqrt{\text{س} + \text{ص}}$ = ...

٢ النقطة (٣، -٤) تقع في الربع .....

٣ إذا كانت النقطة (س - ٢، ١) حيث س ∈ صه تقع في الربع الأول فإن س ....

٤ إذا كانت النقطة (أ، ب) تقع في الربع الرابع فإن أب ..... صفر

< > < =

٥ إذا كانت س ∈ ح فإن النقطة (-٥، س^٢ + ٣) تقع في الربع .....

٢ إذا كانت س = {١، ٢، ٦} صه = {٢، ٤، ٥، ٦} ع = {٤}

مثل المجموعات س، صه، ع بشكل فن

ثم أوجد ① (س ∩ صه) × ع

② (صه - ع) × س

٣ إذا كانت س = [٠، ٢] ، صه = [١، ٤]

مثل بيانيا المنطقة التي تمثل س × صه

واذكر أي من النقط (-١، ٣) ، (١، ٢) ، (٢، ٠) ينتمي إلى س × صه

٤ إذا كان ن(س^٢) = ٩ ، ن(س×صه) = ٦

فإن ن(صه^٢) = ______

٥ إذا كان س = {٣، ٤} فإن ن(س × ∅) = ...

٦ إذا كان أ ∈ س^٢ حيث س = {س : ٥ < س < ٧ ، س ∈ ط} فإن أ هي (٣، ٦ ، {٣، ٦} ، (٦، ٦) ، [٥، ٧])

الدرس الثاني

العلاقة - الدالة

أولاً العلاقة

أخذنا الدرس الماضي س × ص وعرفنا إزاي نربط جميع عناصر المجموعة
س بجميع عناصر المجموعة ص س = {٣ ، ٦} ، ص = {٢ ، ٥ ، ٧}
{(٣ ، ٢) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٧)} = ∴ س × ص
أخد كل عنصر من س بجميع عناصر ص طيب لو أنا عايز أعمل علاقة
بينهم بس بشرط معين مثلاً عايز المسقط الأول (أ) يبقى أصغر
من المسقط الثاني (ب) هكتب ده إزاي بالرياضة وأجيب إزاي

بقول ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب يعني **أ < ب** ← بعوده الشرط

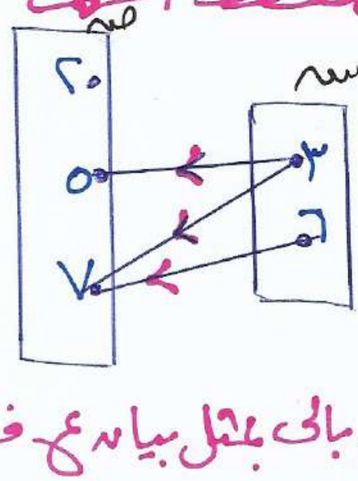
لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

أخد أول رقم من س وأشوفه مع ص تحقق العلاقة ولا
هل ٣ < ٢ ✗ ∴ ٣ ليس مرتبط بالعلاقة مع ٢ أو ٣ ع ٢
٣ < ٥ ✓ ∴ (٣ ، ٥) ∈ بيان العلاقة ع لأنه محقق الشرط
٣ < ٧ ✓ ∴ (٣ ، ٧) ∈ بيان العلاقة ع " " "
أشوف ٦ ليست أصغر من ٢ ∴ (٦ ، ٢) ∉ " " "
٦ " " " ٥ ∴ (٦ ، ٥) ∉ بيان العلاقة ع
٦ < ٧ ✓ ∴ (٦ ، ٧) ∈ بيان العلاقة ع

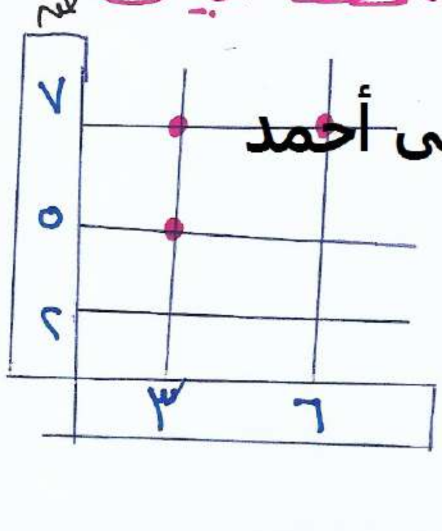
أكتب البيان باسم العلاقة ∴ بيان ع = {(٣ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٦ ، ٧)}

لاحظ إن بيان ع ⊂ س × ص ويمكن تمثيل العلاقة بمخطط سهمي وبياني

المخطط السهمي



المخطط البياني



أخذ بالك بتمثل بيان ع فقط وليس س × ص

ملاحظات لحل المسائل

١ أ معكوس ضربي لـ ب (أشقلب بنفس الإشارة)

أ = ٢ ← ب = $\frac{١}{٢}$

أ = $\frac{١}{٥}$ ← أ = ٥

صفر ليس له معكوس ضربي

صفر ← $\frac{١}{صفر}$ ليس له معنى ✗

٢ أ معكوس جمعي لـ ب (تغير الإشارة)

أ = ٣ ← ب = -٣

أ = -٤ ← ب = ٤

أ = ٠ ← ب = صفر

٣ أ ضعف ب (أ = ٢ب)

أ = ٢ ← ب = ١

أ = -٤ ← ب = -٢

٤ أ مضاعف ب   أ ← ب $\frac{أ}{ب}$

يعني أ مضاعف من مضاعفات ب

أجيب مضاعفات الـ ب وأشوف

أ موجود فيهم ولا

أ = ٢٤   ب = ٦ ← مضاعفات ٦: صفر، ٦، ١٢، ١٨، ٢٤، ...

جدول ضرب ٦

أو بمعنى أخر أشوف أ يقبل القسمة على ب (صفر مضاعف لكل الأعداد)

٥ أ عامل من عوامل ب   أ ← ب $\frac{ب}{أ}$

أجيب عوامل ب وأشوف أ فيهم ولا

أ = ٣   ب = ٢٤ = ١×٢٤ = ٢×١٢ = ٣×٨ = ٤×٦

أو بمعنى آخر أشوف ب تقبل القسمة على أ

٦ أ تقسم ب   أ ← ب $\frac{ب}{أ}$

ب تقبل القسمة على أ بدون باقي طبعا

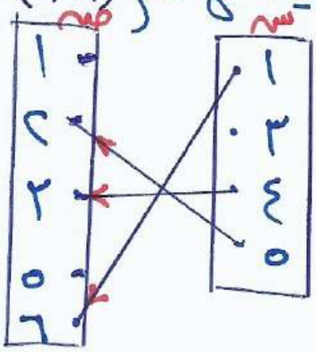
الأعداد الأولية {٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٩، ...}

مثال ١

إذا كانت س = {١، ٣، ٤، ٥}، ص = {١، ٢، ٣، ٥، ٦} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني $\boxed{أ + ب = ٧}$ لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ← الشرط اللي هشتغل عليه

الحل

بيان ع = {(١، ٦)، (٤، ٣)، (٥، ٢)}



أخذ أول رقم من س وأجربه مع كل الأرقام ص أجيب مجموعهم ٧

١+١ ✗   ١+٢ ✗   ١+٣ ✗   ١+٥ ✗   ١+٦ ✓

٣+١ ✗   ٣+٢ ✗   ٣+٥ ✗   ٣+٦ ✗

يبقى كدة ٣ مش مرتبطة بـ ص

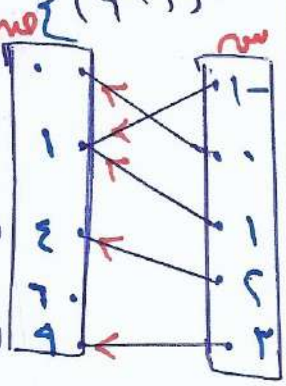
وهكذا الباقي

مثال

إذا كانت س = {-١، ٠، ١، ٢، ٣}، ص = {٠، ١، ٤، ٦، ٩} وكانت ع علاقة من س ← ص حيث أ ع ب تعني $\boxed{أ^٢ = ب}$ اكتب بيان ع

الحل

بيان ع = {(-١، ١)، (٠، ٠)، (١، ١)، (٢، ٤)، (٣، ٩)}



مربع (-١)^٢ = ١ يبقى كدة أوصل -١ مع ١

(٠، ٠)   (٠)^٢ = ٠

(١، ١)   (١)^٢ = ١

(٢، ٤)   (٢)^٢ = ٤

(٣، ٩)   (٣)^٢ = ٩

الأسهل ارسم الرسمة الأول ومن خلالها أشوف هوصل أية بأية وبعدين أكتب ...

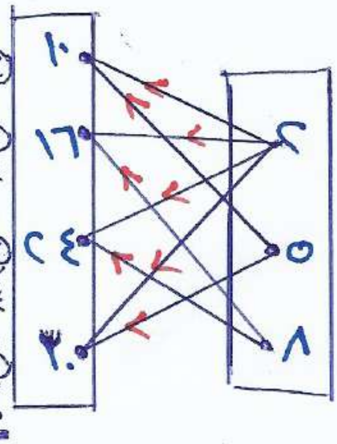
مهندسة جنى أحمد

مثال س = {٢، ٥، ٨} ، ص = {١٠، ١٦، ٢٤، ٣٠}
ع من س إلى ص ، أ ع ب تعني أ عامل من عوامل ب (الشرط)
اكتب بيان ع

الحل

يعني عايز أعرف أية هي عوامل ب
أخذ كل رقم وأجيب له العوامل
بيان العلاقة ع = {(٢، ١٠)، (٢، ١٦)، (٢، ٢٤)، (٢، ٣٠)، (٥، ١٠)، (٥، ٣٠)، (٨، ١٦)، (٨، ٢٤)}

١٠×١ ، ٢×٥ أشوف موجودة فيه
١٦×١ ، ٢×٨ ، ٤×٤ وبعدين أشوف ٥ موجودة منه وأوصل
٢٤×١ ، ٢×١٢ ، ٣×٨ ، ٤×٦
٣٠×١ ، ٢×١٥ ، ٣×١٠ ، ٥×٦ وبعدين ٨



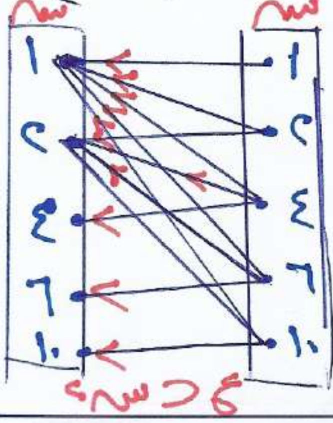
أو ممكن على طول أشوف ب تقبل القسمة على أ $\frac{١٠}{٢}$ ، $\frac{١٦}{٢}$ ، $\frac{٢٤}{٢}$ ، $\frac{٣٠}{٢}$ وهكذا

مثال
إذا كانت س = {١، ٢، ٤، ٦، ١٠} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني أ مضاعف ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ س
اكتب بيان ع ومثلا بمخطط سهمي وآخر بياني

الحل

هنا العلاقة س ← س
ع = {(١، ١)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٤)، (٦، ١)، (٦، ٢)، (٦، ٦)، (١٠، ١)، (١٠، ٢)، (١٠، ١٠)}

هرب ترسم البياني
١÷١
٢÷١ ، ٢÷٢
٤÷١ ، ٤÷٢ ، ٤÷٤
٦÷١ ، ٦÷٢ ، ٦÷٦
١٠÷١ ، ١٠÷٢ ، ١٠÷١٠



ع ⊂ س²

تمارين

١) إذا كانت س = {١٠، ١، ٢، $\frac{١}{٢}$} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني أ معكوس ضربي لـ ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع

الحل

٢) إذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = {١، ٢، ٣، ٦، ٩، ١٢} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أ = $\frac{١}{٣}$ ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع

الحل

مهندسة جنى أحمد

ثانياً الدالة

الدالة هي علاقة بين س ، ص بشرط إن كل عنصر من عناصر س قد ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

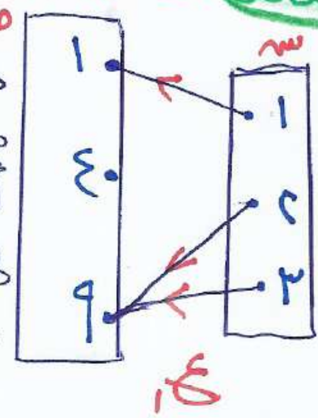
بمعنى آخر لو عندي علاقة بين س وص وتحقق فيها

1 في بيان العلاقة لقيت كل عنصر من عناصر س ظهر مرة واحدة فقط كمسقط أول
∴ العلاقة دي تمثل دالة

2 في المخطط السهمي لو لقيت كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص ∴ العلاقة دي تمثل دالة

3 كذلك في المخطط البياني كل خط رأسي عليه نقطة واحدة فقط من النقاط التي تمثل العلاقة

مثال (1) أي من العلاقات الآتية تمثل دالة من س إلى ص



هل كل عناصر س مرتبطة بـ ص
أيوه تمام
طيب كل عنصر طالع منه سهم واحد بس
أيوه

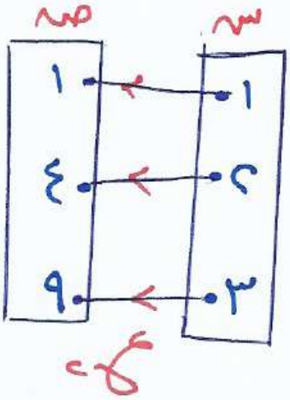
∴ ع١ دالة من س إلى ص

لاحظ

المجموعة س تسمى مجال الدالة
∴ مجال الدالة = {1 ، 2 ، 3}

المجموعة ص تسمى بالمجال المقابل
∴ المجال المقابل للدالة هو {1 ، 4 ، 9}

مجموعة العناصر اللي أنا ارتبط بيها من ص تسمى مدى الدالة
هنا في المثال ارتبط بأية من ص
{1 ، 9} (المسقط الثاني)
∴ مدى الدالة هو {1 ، 9}
وهو مجموعة جزئية من ص



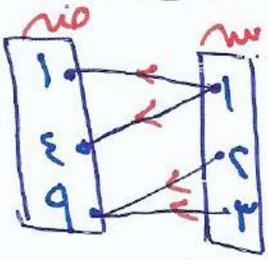
كل عنصر طالع من س منه سهم واحد فقط إلى ص تمام

∴ ع٢ دالة من س إلى ص

المجال = {1 ، 2 ، 3} = س

المجال المقابل = {1 ، 4 ، 9} = ص

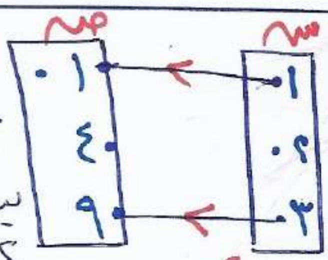
المدى = {1 ، 4 ، 9}
لأني ارتبط بكل عناصر ص



أ ركز كدة 1 ارتبط بـ 4 ، 1 طلع منه سهمين ميتفعش دالة

∴ ع٣ ليست دالة

لحد كدة العنصر ٢ مطلعش منه سهم يبقى ليس دالة لازم كل عنصر يطلع منه سهم

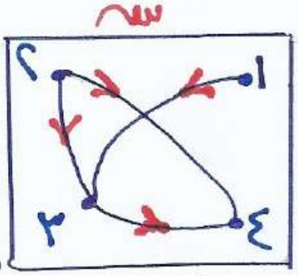


ع٤

∴ ع٤ ليست دالة

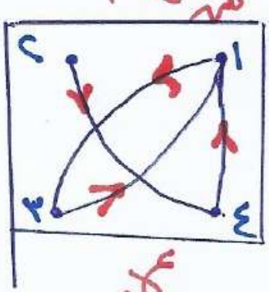
مثال ٥ إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٤} فأى من المخططات السهمية الآتية تعبر عن دالة على المجموعة س؟

أروح عند ١ طالع منه سهم ٣
عند ٢ طالع سهم لـ ٤، سهم ٣ ✗
مكملتش كدة العنصر مرتبط مرتين منفعش



ع١

١ ← خارج منه سهم واحد ٢
٢ ← خارج " " ٤
٣ ← " " " ١
٤ ← خارج منه سهم واحد ١
تمام كدة

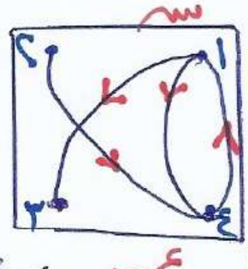


ع٢

∴ ع٢ دالة المدى = {١، ٢، ٣، ٤}

هنا ١ ← خارج منه سهم ٣ وسهم آخر على ٤

كمان ٣ ← مش خارج منه أى سهم خالص



ع٣ ∴ ع٣ ليس دالة

∴ الحل هو ع٢ هى التى تعبر عن دالة على المجموعة س

مهندسة جنى أحمد

مثال ٣ إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٤} فبين أى العلاقات الآتية تمثل دالة

١) ت١ = {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)}

لازم علشان تكون دالة يبقى {١، ٢، ٣، ٤} موجودين مرة واحدة بس من المسقط الأول
تمام كدة ∴ ت١ دالة

المدى هو المسقط الثانى {١، ٢، ٣، ٤}

٢) ت٢ = {(١، ٣)، (٢، ٣)، (٣، ٣)، (٤، ٣)}

∴ ت٢ دالة
المدى = {٣} المسقط الثانى

٣) ت٣ = {(١، ٤)، (٤، ١)، (١، ٢)، (٢، ١)}

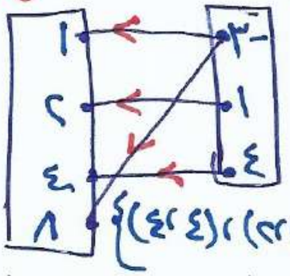
ت٤ = {(١، ٢)، (٢، ١)، (٣، ٤)}

جرب أنت

مثال ٤ المخطط السهمى يمثل علاقة من س ← ص
س = {-٣، ١، ٤}، ص = {١، ٢، ٤، ٨}

١) اكتب بيان ع
٢) هل ع دالة أولا ولماذا
٣) ما قيمة س إذا كان (س، ٢) ∈ بيان ع؟

الحل



بيان ع = {(-٣، ١)، (-٣، ٨)، (١، ٢)، (٤، ٤)}

ع ليست دالة لأن -٣ ظهرت مرتين فى مسقط أول

(س، ٢) ∈ بيان العلاقة ← عندى (١، ٢) ∈ العلاقة

∴ (س، ٢) = (١، ٢)

س = ١

مثال: إذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = {٢، ٣، ٧} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب " تعني أ + ب = عدد أولي

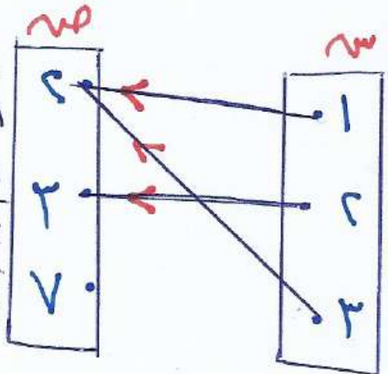
١) اكتب بيان ع وهل ع دالة

٢) إذا كان ٢أ ع ٣ ∈ بيان ع أوجد أ

الحل

الأعداد الأولية هي {٢، ٣، ٥، ٧، ....٩٧....}

١) بيان ع = {(١، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ٢)}



١+٢=٣ تم
١+٣=٤ ×
١+٧=٨ ×
٢+٢=٤ ×
٢+٣=٥
٢+٧=٩ ×
٣+٢=٥
٣+٣=٦ ×
٣+٧=١٠ ×

كل عنصر خارج منه سهم واحد فقط

∴ ع دالة

٢) إذا كان ٢أ ع ٣ ∈ بيان ع أوجد أ

هنا عندى ٢أ مرتبط ٣

(٢أ، ٣) ∈ بيان العلاقة وأيضا (٢، ٣) ∈ العلاقة

∴ ٢أ = ٢ ← أ = ٢/٢ = ١

مثال: إذا كانت ع علاقة على مجموعة الأعداد الطبيعية ط حيث أ ع ب تعني $\boxed{أ × ب = ١٢}$ لكل أ ∈ ط ، ب ∈ ط

إذا كان س ع ٤ فأوجد س

ص ع ٣ص فأوجد ص

الحل

العلاقة اللى عندى أ × ب = ١٢ صح

∴ س × ٤ = ١٢ ← س = ١٢/٤ = ٣

ص × ٣ص = ١٢ ← ٣ص² = ١٢ ← ص² = ٤

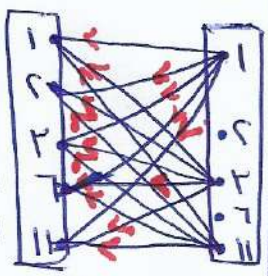
∴ ص = ± ٢

لأن س ع ٤ ← هنا س هي أ ، ٤ هي ب

وكذلك ص ع ٣ص ∴ ص هي أ ، ٣ص هي ب

مثال: إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٦، ١١} وكانت ع علاقة على س تعني أ + ٢ب = عدد فردي اكتب بيان ع وهل ع دالة ولماذا

الحل



١+٢×١=٣
١+٢×٢=٥
١+٢×٣=٧
١+٢×٦=١٣
١+٢×١١=٢٣
٢+٢×١=٤ ×
٢+٢×٢ ×
٢+٢×٣ ×
وهكذا

الرسمة طلعت صغير جرب تخليها كويس

بيان العلاقة = {(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٦)، (١، ١١)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)، (٣، ٦)، (٣، ١١)، (١١، ١)، (١١، ٢)، (١١، ٣)، (١١، ٦)، (١١، ١١)}

ع ليست دالة لأن كل من ١، ٣، ١١ لها أكثر من صورة في س كذلك ٢، ٦ ليس لها صور في س

مهندسة جنى أحمد

درس

دوال كثيرات الحدود

في البداية وقبل التعرف على دوال كثيرات الحدود هنشوف بنرمز للدالة بأية :- عرفنا يعني أية دالة وقولنا أنها علاقة من س و ص بشروط فكرني كده الشروط أية ؟؟

مهندسة/ [illegible]

وكنت برمز للعلاقة بالرمز ع لكن الدالة بقى ؟؟

يُرمز للدالة عادة بأحد الحروف مثل د أو ن أو ر أو هـ أو ......

وتكتب د : س ← ص وتقرأ د دالة من س إلى ص

ن : س ← ص وتقرأ ن دالة من س إلى ص

وممكن أقول د(س) = ص أو ن(س) = ص

خد بالك

ن(س) أو ن(ص) ← دي عدد عناصر المجموعة س أو ص أوعى تتلغبط

إذا كانت د(س) = ٣س + ١ هذه الصورة تسمى بقاعدة الدالة

ودي بعرف أجيب منها صورة كل عنصر من عناصر المجال (الأزواج المرتبة)

مثال ① إذا كانت س = {٠، ١، ٣} ، ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧} وكانت د : س ← ص حيث $\boxed{\text{د(س) = ٥ − س}}$ أوجد بيان الدالة ومثلها بيانيا وأوجد المدى

← قاعدة الدالة هشتغل فيها زي ما كنت بعمل في العلاقة

الحل

هعمل أية علشان أجيب بيان الدالة

هاخد كل عنصر من س وأعوض بيه في الدالة وأشوف المسقط الثاني (ص) هيطلع إزاي

∵ د(س) = ٥ − س ∴ د(٠) ⇐ هشيل كل س وأضع مكانها صفر

عند س = صفر د(٠) = ٥ − صفر = ٥ ∴ د(٠) = ٥ ← (صفر، ٥) ∈ بيان الدالة

معناها عند س = صفر ← ص = ٥ أو د(س) = ٥

عند س = ١ ← أشيل كل س وأضع مكانها ١

∴ د(١) = ٥ − ١ = ٤ ← د(١) = ٤ ← $\boxed{\text{(١، ٤)}}$ ∈ بيان الدالة

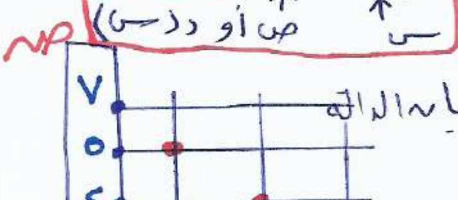
س ، ص أو د(س)

عند س = ٣

∴ د(٣) = ٥ − ٣ = ٢ ∴ د(٣) = ٢ ∴ (٣، ٢) ∈ بيان الدالة

∴ بيان د = {(٣، ٢)، (١، ٤)، (صفر، ٥)}

المدى هو صور عناصر س أو صور عناصر المجال أو المسقط الثاني = {٢، ٤، ٥}



الدالة كثيرة الحدود

حصرية إلهام أحمد

هي دالة قاعدتها حد أو مقدار جبري بحيث يكون كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية

صورتها: الدالة $د : ح \to ح$ ، $د(س) = أ_0 + أ_1 س + أ_2 س^2 + \cdots + أ_ن س^ن$

حيث $أ_0 ، أ_1 ، أ_2 ، \dots ، أ_ن \in ح$ ، $ن \in ط$

المجال — المجال المقابل

∴ شرطين علشان تكون دالة كثيرة الحدود ① المجال والمجال المقابل هو ح ② الأس (ن) ∈ ط عدد طبيعي

يعني مينفعش الأس يكون ولا جذر ولا عدد سالب ولا كسر

مثال ① أي من الدوال الآتية تمثل كثيرة حدود

1) $د : د(س) = 2س - 5$

الحل

هل هنا المجال والمجال المقابل ح

أيوه عرفت إزاي أقدر أعوض عن س بأي قيمة من ح يظهر لها صورة في ح أيضاً وأس (س) عدد طبيعي

∴ الدالة د كثيرة حدود

2) $د : د(س) = س^3 + س^2 + 3$

سهلة جداً بمجرد النظر كده طالما أس (س) ∈ ط

∴ دي كثيرة حدود

3) $د : د(س) = 3$

دي برضو كثيرة حدود إزاي ومفيش س أصلاً

هعتبر عند $د(س) = 3 \times س^{صفر}$

∴ أس (س) ∈ ط

4) $د(س) = س + \frac{1}{س}$

الحل

لا دي ليست كثيرة حدود ليه لأن عندي $\frac{1}{س}$ ودي طبعاً $= س^{-1}$ يعني أس سالب مينفعش

5) $د : د(س) = س^2 + \sqrt{س} + 8$

الحل

الدالة د لا تمثل دالة كثيرة حدود لأن عندي $\sqrt{س}$ أس (س) ∉ ط

6) $د(س) = س(س + \frac{1}{س} - 2)$

الحل

لا تمثل دالة كثيرة حدود عند $\frac{1}{س}$ لو أنا ضربت س اللي بره هيكون الناتج $\cancel{س^2 + 1 - 2س}$

لا مينفعش الاختصار هنا

* ملحوظة مهمة جداً جداً

عند بحث ما إذا كانت دالة كثيرة الحدود أم لا لا نقوم بتبسيط القاعدة

إزاى أعرف درجة الدالة كثيرة الحدود

سهل جدا نجد درجة الدالة عن طريق أكبر أس للمتغير س

مثال د(س) = ٥ س¹ − ٤

الحل

هنا أكبر أس لـ س هو ١

يبقى دى من الدرجة الأولى أو دالة خطية

د(س) = ٣س − س²

الحل

عندى س¹ ، س² يبقى أكبر أس هو ٢ ∴ من الدرجة الثانية أو دالة تربيعية

د(س) = س (س² − ٣)

الحل

هنا لازم أضرب الس فى القوس

د(س) = س³ − ٣س

∴ الدالة من الدرجة الثالثة أو دالة تكعيبية

٣ د(س) = √٢ س² (٢ + س)²

الحل

دى كثيرة حدود س أية دة فى جذر ، لا أنا خدت بالى لو كان الجذر على المتغير كنت هقول لست كثيرة حدود لكن على الأرقام مفيش مشكلة

طيب علشان أعرف أنا من الدرجة الكام لازم أبسط الدالة

د(س) = √٢ س² (٤ + ٤س + س²)

= ٤√٢ س² + ٤√٢ س³ + √٢ س⁴

أكبر أس هو س⁴

∴ الدالة ~~كثيرة~~ كثيرة حدود من الدرجة الرابعة

ملحوظة مهم جداً

بيحبوا فى البداية إذا كانت الدالة كثيرة حدود أم لا

بعد كدة ببسط القاعدة علشان أعرف أكبر أس عندى كام

وعلطول لو لقيت س فى المقام أو √س تبقى ليست كثيرة حدود بالتالى مليش علاقة بالدرجة

مثال أى من الدوال الآتية تمثل كثيرة حدود وعين درجتها

١ د(س) = س² − (س² − ٤)

دى كثيرة حدود لما أجيب الدرجة أبسط

د(س) = ~~س²~~ − ~~س²~~ + ٤

= ٤

هنا ٤ بس يعنى ٤ × س^صفر

∴ الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الصفرية أو دالة ثابتة

٢ د(س) = س ($\frac{٤}{س}$ + ٥)

الحل

فى س فى المقام يبقى ~~لا~~ لا تمثل كثيرة حدود

خلاص مليش علاقة بالدرجة طالما طلعت ليست كثيرة حدود

مهندسة إيناس عيد

إذا كانت د: ح ← ح اذكر درجة د ثم أوجد د(−٢)، د(٠)، د($\frac{1}{2}$) حيث د(س) = س² − ٤

الحل

الدالة من الدرجة الثانية

د(−٢) = علشان أجيب د(−٢) هشيل كل س من الدالة وأضع مكانها −٢

∴ د(−٢) = (−٢)² − ٤ = ٤ − ٤ = صفر

د(−٢) = صفر

د(٠) = أشيل كل س وأضع مكانها صفر

∴ د(٠) = (٠)² − ٤ = −٤

د($\frac{1}{2}$) = ($\frac{1}{2}$)² − ٤ = $\frac{1}{4}$ − ٤ = −٣$\frac{3}{4}$

مثال

إذا كانت د(س) = س² − ٣س، ر(س) = س − ٣ أوجد د(√٢) + ٣ر(√٢)

الحل

هعمل أية هنا معطى دالتين د و ر

وعايز د(√٢) + ٣ر(√٢)

هقسمها الى جزئين هجيب الأول

د(√٢) يبقى هعوض عند س = √٢ س فى الدالة د

∴ د(√٢) = (√٢)² − ٣(√٢)

= ٢ − ٣√٢ = أسيبها كده

٣ر(√٢) دى معناها إن ٣ مضروبة فى دالة ر عند س = √٢

∴ ٣ر(√٢) = هروح عند دالة ر وأشيل س وأضع مكانها √٢

مذكرة الشاطر

∴ ٣ر(√٢) = ٣[√٢ − ٣]

= ٣√٢ − ٩ تمام

أخد بالى نضرب الـ٣ فى القوس كله

∴ د(√٢) + ٣ر(√٢)

= ٢ − $\cancel{٣√٢}$ + $\cancel{٣√٢}$ − ٩ = −٧

⑥ أثبت أن د(٣) = ر(٣) = صفر

الحل

هجيب د(٣) وأجيب ر(٣) وأشوف بساوى كام

∴ د(٣) = (٣)² − ٣(٣) = ٩ − ٩ = صفر

∴ ر(٣) = ٣ − ٣ = صفر

∴ د(٣) = ر(٣) = صفر

مثال

إذا كانت د: ح ← ح حيث د(س) = (س − ٣)²

ر: ح ← ح حيث ر(س) = س − ٣ فأوجد قيمة س التى تجعل د(س) = ر(س)

الحل

عايز س اللى تخلى الدالتين متساويين

$\underbrace{(س - ٣)^2}_{د(س)} = \underbrace{س - ٣}_{ر(س)}$

س² − ٦س + ٩ = س − ٣

س² − ٦س − س + ٩ + ٣ = صفر

س² − ٧س + ١٢ = صفر ← (س − ٣)(س − ٤) = صفر

فاكرين التحليل ولا

س = ٣ أو س = ٤

إذا كان بيان الدالة د = {(٠، ٤)، (١، ٣)، (٢، ٢)، (٣، ١)} اكتب كلا من مجال ومدى الدالة د واكتب قاعدة الدالة د

حاول تفكر فيها

دراسة بعض دوال كثيرات الحدود

مهندسة/ إيناس أحمد

في الدرس ده هنعرف إزاي نرسم بعض الدوال كثيرات الحدود زي

① الدالة الثابتة أو الصفرية — هنا أرقام بس مفيش س

② الدالة الخطية أو من الدرجة الأولى ← أكبر أس د(س) = ١

③ الدالة التربيعية أو الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية ← هنا أكبر أس ٢

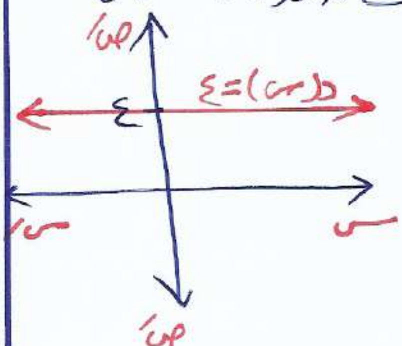
أولا الدالة الثابتة

ليه أسميها دالة ثابتة مثلا عندي د(س) = ٤ أجرب كده أجيب

د(٠) = هشيل كل س وهحط صفر بس أنا معنديش س أصلا

∴ د(٠) = ٤ طيب د(٥) = ٤ برضو د(١٠) = ٤

مهما غيرت قيم س الدالة قيمتها ثابتة ٤ علشان كده أسميها دالة ثابتة



طيب أرسمها إزاي

دي أسهل دالة هعتبر رسمها هرسم محور الإحداثيات عادي وأروح عند ص = ٤ مش هي د(س) = ص يبقى ص = ٤

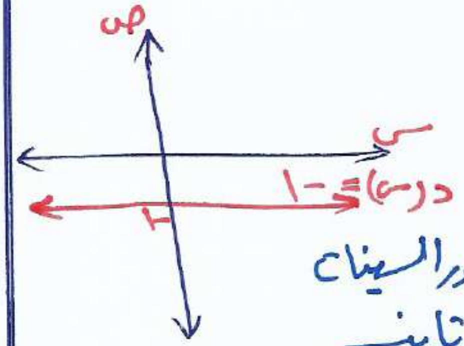
أرسم بقى خط مستقيم عند ٤ يوازي محور السينات

مثال

مثل بيانيا د: د(س) = -١ ثم أوجد ما يأتي

① درجة الدالة د ② د(٥)

③ د(٢) + د(-٢) ④ د(-س)



الحل

هرسم إزاي هروح عند ص = -١ وأرسم خط يوازي محور السينات

① درجة الدالة من الدرجة الصفرية أو دالة ثابتة

② د(٥) = -١ عرفنا د(عوضت بحاجة) = -١

③ د(٢) + د(-٢) = -١ + -١ = -٢

④ د(-س) = -١ برضو

مهندسة / إيناس أحمد

ثانياً الدالة الخطية

ودى عشان ليه اسمها خطية لأن لما بارسم الدالة بتكون خط مستقيم

صورتها د(س) = م س + ب حيث م ∈ ح - {٠} ، ب ∈ ح

طيب ارسمها إزاى سهل بوضوح

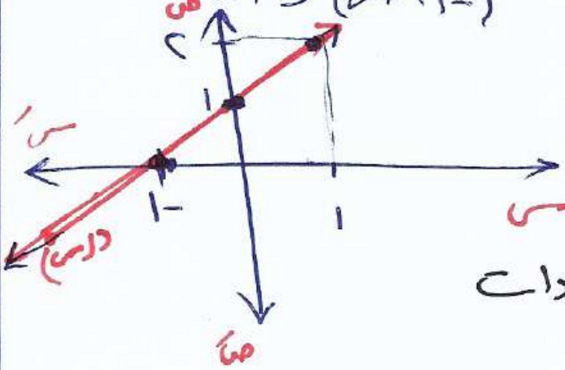
أخذنا السنة اللى فاتت إزاى ارسم ص = س + ١ صح وأنا عندى ص = د(س)

∴ $\boxed{د(س) = س + ١}$ سهل أرسمها أعوض بأى ثلاث نقاط لـ س وأجيب منها ص

عند س = ٠ ← د(٠) = صفر + ١ = ١ (٠ ، ١) ∈ د

عند س = ١ ← د(١) = ١ + ١ = ٢ (١ ، ٢) ∈ الدالة

عند س = -١ ← د(-١) = -١ + ١ = صفر (-١ ، صفر) ∈ الدالة



أرسم بقى تمام

لاحظ

ممكن أرسم الدالة عن طريق معرفة نقطة تقاطع الدالة مع كلاً من محور السينات والصادات

د(س) = م س + ب

الدالة دى تقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)

" " " السينات $(\frac{-ب}{م} ، ٠)$

نطبق على أول مثال تقطع الصادات فى (٠ ، ١) والسينات فى $(\frac{-١}{١} ، ٠)$

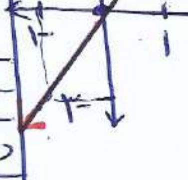
مثال

مثل بيانياً كلاً من الدوال وأوجد نقطتى تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

[١] د(س) = ٣ س

الحل

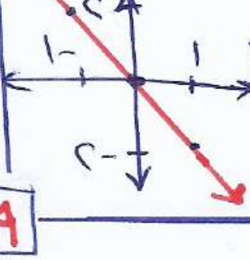
س	٠	١	-١
د(س)	٠	٣	-٣



إذا كانت الدالة على صورة د(س) = م س فإنها تمر بالنقطة الأصل (٠ ، ٠)

[٢] د(س) = -٢ س

س	٠	١	-١
د(س)	٠	-٢	+٢

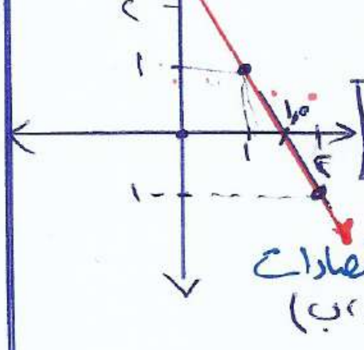


تمر أيضاً (٠ ، ٠)

[٣] د(س) = $\overset{م}{-٢}$ س + $\overset{ب}{٣}$

الحل

س	٠	١	٢
د(س)	٣	١	-١



نقطة التقاطع مع محور الصادات هى (٠ ، ٣) ← (٠ ، ب)

نقطة التقاطع مع محور السينات

$(\frac{-ب}{م} ، ٠) \leftarrow (\frac{-٣}{-٢} ، ٠) = (\frac{٣}{٢} ، ٠) = (١٫٥ ، ٠)$

مثال إذا كان المستقيم الممثل للدالة د: ح ← ح $د(س) = أ س + ب$ يقطع محور السينات في النقطة (٣، ٠) ويقطع محور الصادات في (٠، -٣)
أوجد قيمة أ، ب ثم أوجد قيمة د(١)

مهندسة إيمان أحمد

الحل

المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ب) = (٠، -٣)
∴ ب = -٣
المستقيم يقطع محور السينات في النقطة ($\frac{-ب}{أ}$، ٠) = (٣، ٠)
∴ $\frac{-ب}{أ} = ٣$ بالتعويض عن ب = -٣ ← $\frac{-٣ \times -١}{أ} = \frac{٣}{١}$ ← ٣أ = ٣
∴ أ = ١ ∴ $\boxed{د(س) = س - ٣}$
د(١) = ١ - ٣ = -٢

مثال إذا كانت د(س) = ٢س + ب ، ر(س) = ب حيث د، ر حدوال كثيرات الحدود وكانت د(١) + ر(٤) = ١٢ أوجد قيمة د(٤) + ر(-١)

الحل

علشان أعرف أجيب المطلوب لازم الأول أعرف قيمة ب
طيب هجيبها إزاى عن د(١) + ر(٤) = ١٢ أعوض فيها
∴ د(١) = ٢ + ب ، ر(٤) = ب
∴ د(١) + ر(٤) = ٢ + ب + ب = ١٢ ← ٢ + ٢ب = ١٢ ← ٢ب = ١٠ ← ب = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥
∴ $\boxed{د(س) = ٢س + ٥ \quad ، \quad ر(س) = ٥}$ ← ثابتة

د(٤) + ر(-١) = ٢ × ٤ + ٥ + ٥ = ٨ + ١٠ = ١٨

سؤال الحصة السابقة بيان الدالة = {(٠، ٤)، (١، ٣)، (٢، ٢)، (٣، ١)}
اكتب مجال ومدى الدالة د واكتب قاعدة الدالة

الحل

المجال هو الاحداثي السيني = {٠، ١، ٢، ٣}
المدى هو الاحداثي الصادي = {٤، ٣، ٢، ١}
إزاى بقى أعرف أجيب قاعدة الدالة ؟ نشوف كدة أول زوج مرتب (٠، ٤) مجموعهم ٤ تمام طيب (١، ٢) مجموعهم ٤ وكذلك باقي الأزواج
∴ س + ص = ٤ ← س + د(س) = ٤
(ص = د(س))
∴ $\boxed{د(س) = ٤ - س}$

الدالة التربيعية

هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية وتكون على الصورة

د: ح ← ح حيث $\boxed{د(س) = أ س^2 + ب س + جـ}$ أ، ب، جـ ∈ ح ، أ ≠ صفر

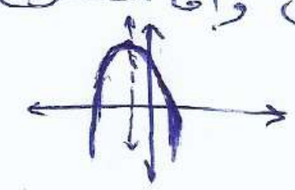
إزاي ارسم الدالة

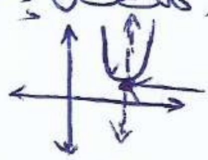
عادي جدا زي الدوال السابقة هعوض بمجموعة قيم لـ س وأجيب منها د(س)

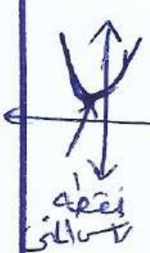
بس أخد بالي هنا بيبقى معطى فترة أشتغل عليها لتسهل عليا الرسم

طيب شكل الرسمة بتبقى أيه

الرسم عبارة عن منحنى إما مفتوح لأعلى وإما مفتوح لأسفل







والمنحنى له محور تماثل ونقطة رأس المنحنى

هحدد شكل الرسمة إزاي ونقطة رأس المنحنى

* ① إذا كان معامل $س^2$ موجب فإن المنحنى يكون مفتوح لأعلى

② نقطة رأس المنحنى هي $\left(\frac{-ب}{2أ} ، د\left(\frac{-ب}{2أ}\right)\right)$

يعني الإحداثي السيني لرأس المنحنى هو $\frac{-ب}{2أ}$

طيب والإحداثي الصادي هعوض في الدالة عند $س = \frac{-ب}{2أ}$

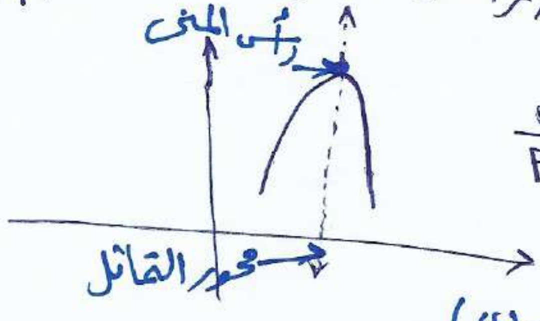
∴ $ص = د\left(\frac{-ب}{2أ}\right)$ تمام كدة

③ يكون للدالة قيمة صغرى $د\left(\frac{-ب}{2أ}\right)$

وهي قيمة الإحداثي الصادي لنقطة رأس المنحنى

④ وللدالة محور تماثل هو

معادلة محور التماثل للدالة هو $س = \frac{-ب}{2أ}$



* ② إذا كان معامل $س^2$ سالب

المنحنى يكون مفتوح لأسفل

نقطة رأس المنحنى هي أيضا $\left(\frac{-ب}{2أ} ، د\left(\frac{-ب}{2أ}\right)\right)$

يكون للدالة قيمة عظمى وهي أيضا $د\left(\frac{-ب}{2أ}\right)$

ومحور تماثل هو $س = \frac{-ب}{2أ}$

خد بالك
محور التماثل يقسم الدالة إلى جزئين متماثلين تماما

* مهم جدا من نقطة رأس المنحنى

الإحداثي السيني هو معادلة محور التماثل

الإحداثي الصادي هو قيمة العظمى أو الصغرى للدالة

مهندسة جنى أحمد

نشوف أمثلة نفهم منها أفضل

مهندسة جنى أحمد

مثال

مثل بيانيا كلا من الدوال الآتية ومن الرسم استنتج إحداثي رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة س ∈ ح

① د(س) = أس² + ب (أ = ١، ب = صفر) متغيرا س ∈ [-٣، ٣] ② د(س) = ٢ − س² متغير س ∈ [-٣، ٣]

الحل

هو عايز أرسم الأول وبعدين أجيب باقي المطلوب

طب لو أنا عايز أعرف شكل الرسمة قبل ما أبدأ في الرسم عندي نقطة رأس المنحنى هتكون

($\frac{-ب}{٢أ}$ ، د($\frac{-ب}{٢أ}$)) = (صفر، صفر) لأن

ب = صفر، ٢أ = ١ تمام

والمنحنى مفتوح لأعلى لأن أ موجب

أعمل جدول [-٣، ٣]

س	٣	٢	١	٠	-١	-٢	-٣
د(س)							

نعوض بال س من الفترة [-٣، ٣]

نشيل بقى س = ٠ ← د(س) = ٠

س = ١ ← د(س) = ١

س = ٢ ← د(س) = ٤

س = ٣ ← د(س) = ٩

س = -١ ← د(س) = ١

س = -٢ ← د(س) = ٤

س = ٣ ← د(س) = ٩

أطلع وأعوض في الجدول وأرسم بقى

من الرسم

(٠، ٠) هي رأس المنحنى

للدالة قيمة صغرى

هي صفر

معادلة محور التماثل

س = صفر

الحل

أ = -١

ب = صفر

هعمل الجدول على طول

س	٣	٢	١	صفر	-١	-٢	-٣
د(س)	-٧	-٢	١	٢	١	-٢	-٧

عند س = صفر ← د(س) = ٢

عند س = ١ ← د(س) = ٢ − (١)² = ٢ − ١ = ١

عند س = ٢ ← د(٢) = ٢ − ٤ = −٢

عند س = ٣ ← د(٣) = ٢ − ٩ = −٧

وهكذا هلاحظ

ان عند س = −١ قيمة د(−١) = د(١) = ١

د(−٢) = د(٢) = −٢

د(−٣) = د(٣) = −٧

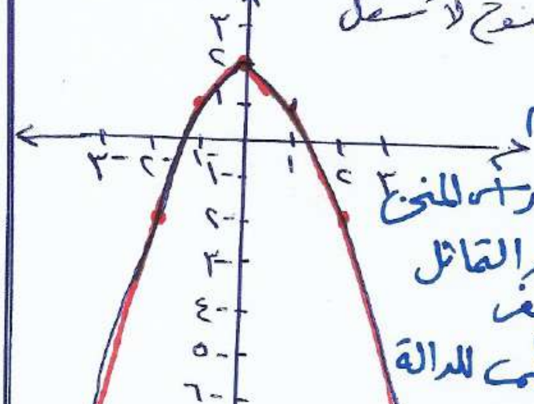
الدالة بيكون متماثلة عند محور التماثل

أجيب زي كدة رأس المنحنى قبل الرسم س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{صفر}{٢×-١}$ = صفر

ص = د($\frac{-ب}{٢أ}$) = د(صفر) = ٢ − (صفر)² = ٢

∴ نقطة رأس المنحنى (صفر، ٢)

معامل س² سالب هتكون للدالة قيمة عظمى والمنحنى مفتوح لأسفل



من الرسم

(٠، ٢) هي رأس المنحنى

معادلة محور التماثل

س = صفر

القيمة العظمى للدالة = ٢

رأس المنحنى (٠، ٢)

قيمة صغرى ↑ قيمة صغرى ↑ معادلة محور التماثل

ملاحظة يمكن عمل الجدول عن طريق الآلة الحاسبة

٣) د(س) = (س − ٢)² معرفة س ∈ [−١، ٥]

الحل

هنا الدالة لازم أسطرها علشان تكون على الصورة القياسية أس² + ب س + جـ

∴ د(س) = س² − ٤س + ٤

أعمل الجدول علطول من الآلة علطول وهتلاقي الطريقة في نهاية الدرس

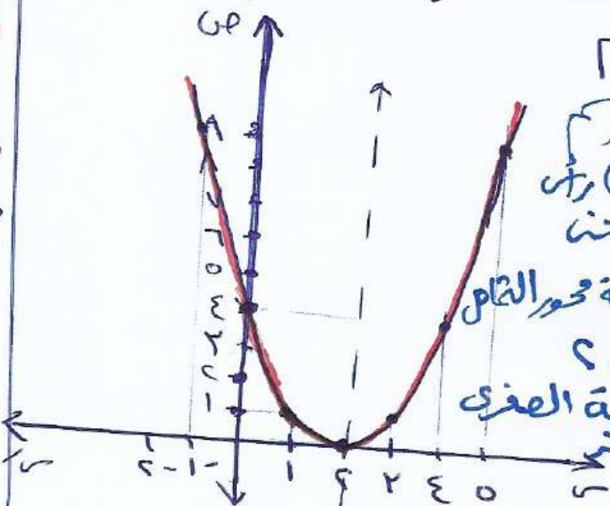
س	−١	٠	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

من هنا عكس أعرف نقطة رأس المنحنى

قيم د(س) يمين (٢، ٠) زي القيم شمالاً

يبقى هي دي رأس المنحنى

أرسم



من الرسم (٢، ٠) رأس المنحنى

معادلة محور التماثل س = ٢

القيمة الصغرى = صفر

محور التماثل س = ٢

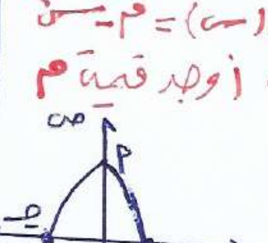
مثال

الشكل يمثل منحنى الدالة د(س) = م − س²

إذا كان أو = ٤ وحدات أوجد قيمة م

① إحداثي ب، جـ

② مساحة المثلث أ ب جـ



الحل

نقطة أ = (٠، ٤) ∈ د(س)

أعوض بيها في الدالة ← عند س = صفر د(س) = ٤

٤ = م − صفر ← $\boxed{م = ٤}$

من الرسم و محور تماثل الدالة ∴ يعني المسافة من و ب = و جـ

أجيب ب إزاي

عند نقطة ب، جـ قيم د(س) = صفر صح

∴ صفر = ٤ − س² ← س² = ٤

∴ س = ±٢

∴ ب = (٢، ٠)   جـ = (−٢، ٠)

مساحة Δ أ ب جـ = ½ القاعدة × الارتفاع = ½ ب جـ × و أ = ½ × (٤) × ٤

ب جـ = ٤ وحدات وكذلك و أ = ٤ وحدات

∴ م Δ أ ب جـ = ٨ وحدات مربعة

مثال

إذا كانت د(س) = س² − ك س + جـ وكانت م (١، ٤) هي نقطة رأس المنحنى أوجد قيمة ك، جـ

الحل

هو معطي رأس المنحنى (١، ٤) تمام

حيث أنا عندي (١، ٤) = ($\frac{-(-ك)}{٢}$ ، د($\frac{ك}{٢}$))

(١، ٤) = ($\frac{ك}{٢}$ ، د($\frac{ك}{٢}$))

١ = $\frac{ك}{٢}$ ← المسقط الأول = المسقط الأول

∴ $\boxed{ك = ٢}$

٤ = د($\frac{ك}{٢}$) ← أشيل كل س وأضع $\frac{ك}{٢}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١

٤ = ١² − ٢×١ + جـ

٤ = ١ − ٢ + جـ ← $\boxed{جـ = ٥}$

أو النقطة (١، ٤) تحقق الدالة ومنها نجيب جـ

مثال

إذا كان المنحنى د(س) = م − س² يقطع محور السينات في (−٢، ب) فأوجد م^ب + ٢م

الحل

يقطع محور السينات في (س، ب) ← يبقى ص = صفر

∴ ب = صفر

(−٢، ٠) ∈ الدالة أعوض بيها

صفر = م − (−٢)² ← م = ٤

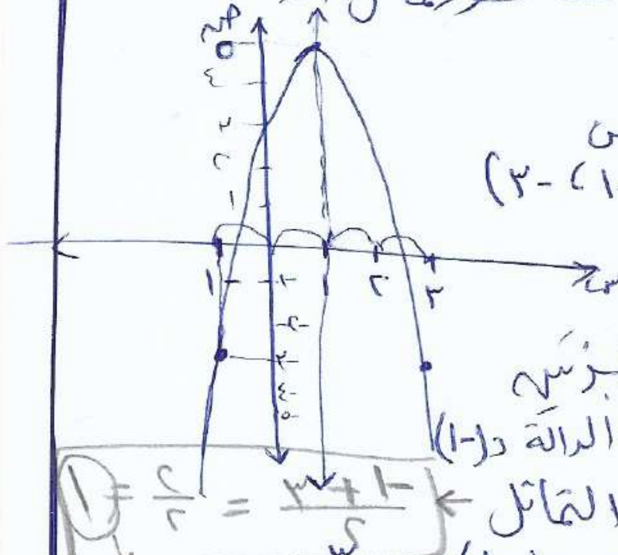
٤^صفر + ٢ × ٤ = ١ + ٨ = ٩ = م^ب + ٢م

مهندسة جنى أحمد

مثال
إذا كان رأس منحنى الدالة التربيعية هو (١ ، ٥) وكانت د(-١) = -٣
فإن د(٣) = ...

مهندسة جنى أحمد

الحل
عندي نقطة رأس المنحنى منها أقدر أجيب محور تماثل الدالة
معادلة محور تماثل الدالة عند س = ١

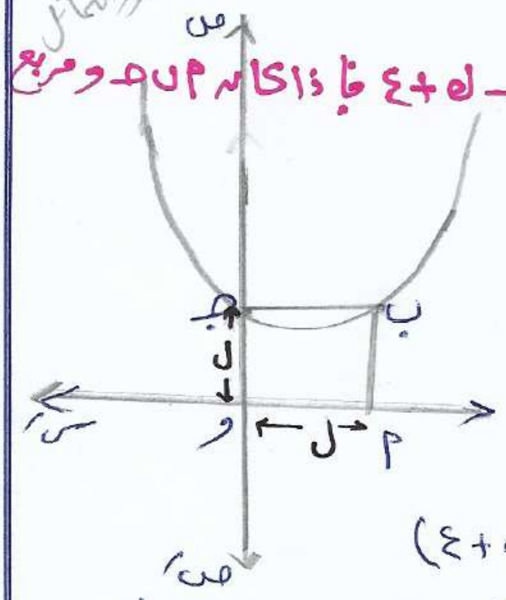


أحاول أرسم شكل الدالة كده طبعا هو مش
دقيق أنا عندي نقطتين (١ ، ٥) ، (-١ ، -٣)

عرفت أن محور التماثل س = ١
طيب مش محور التماثل بيقسم الدالة إلى جزئين
متماثلين يبقى قيمة الدالة عند د(٣) = قيمة الدالة د(-١)
لأن ٣ ، -١ على نفس البعد من محور التماثل
وهو معطى د(-١) = -٣ ∴ د(٣) = د(-١) = -٣

$\boxed{\frac{-١+٣}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١}$
معادلة محور التماثل

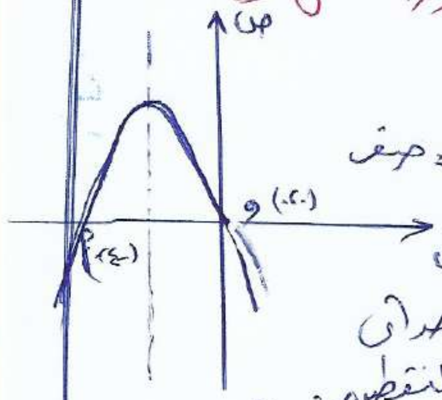
مثال في الشكل المقابل د(س) = س² - (ك - ٢)س - ك + ٤ فإذا كان أ ب جـ و مربع
أوجد قيمة ك



الحل
نفرض أن طول ضلع المربع ل وحدة طول
∴ نقطة جـ = (٠ ، ل) ، ب = (ل ، ل)
∵ جـ ∈ منحنى الدالة ∴ تحققها أعوض بيها
∴ ل = (صفر)² - (ك - ٢) × صفر - ك + ٤
← ل = -ك + ٤ ← ب = (-ك + ٤ ، -ك + ٤)
كده أقدر أعوض في الدالة وهيكون عندي مجهول واحد بس هو ك
∴ ~~-ك + ٤~~ = (-ك + ٤)² - (ك - ٢)(-ك + ٤) ~~- ك + ٤~~
∴ صفر = (-ك + ٤)² - (ك - ٢)(-ك + ٤)   هاخد هنا (-ك+٤) مشترك
صفر = (-ك + ٤) [(-ك + ٤) - (ك - ٢)]
صفر = (-ك + ٤)(-٢ك + ٦) ← إما -ك + ٤ = صفر ← ك = ٤ مرفوض
أو -٢ك + ٦ = ٠ ← $\boxed{ك = ٣}$
لأن لو عوضت وجيبت ل هيكون صفر يبقى مينفعش

مثال
أكمل ما يأتي

① في الشكل المقابل إحداثيات أ (−٤، ٠) فإن معادلة محور التماثل هي



الحل

س = د(و) = د(أ)

عندي الدالة عند نقطة و = قيمة الدالة عند نقطة أ = صفر

∴ محور التماثل في منتصف المسافة بين النقطتين

س = (صفر + (−٤)) ÷ ٢ = −٤ ÷ ٢ = −٢ ← مجموع الإحداثي السيني للنقطتين ÷ ٢

∴ معادلة محور التماثل س = −٢

② إذا كان د(س) دالة تربيعية حيث د(٤) = د(٦)
وكان د(ل+٢) = د(ل−٤) فإن ل = ...

الحل

نفس الفكرة بالضبط ← د(٤) = د(٦)

معادلة محور التماثل ⇐ س = (٤ + ٦) ÷ ٢ = ١٠ ÷ ٢ = ٥

معادلة محور التماثل أيضا = (ل + ٢ + ل − ٤) ÷ ٢ ← لأن د(ل+٢) = د(ل−٤)

∴ ٥ = (٢ل − ٢) ÷ ٢ ← ١٠ = ٢ل − ٢ ← ٢ل = ١٢ ∴ ل = ٦

مثال إذا كان د(س) دالة تربيعية وكان خط التماثل هو س = ٥
(٧، ٠) ∈ منحنى الدالة أوجد قاعدة الدالة د(س)

الحل

عندي محور التماثل عند س = ٥ ← (٧، ٠) ∈ الدالة (هـ، ٠) ∈ الدالة أيضا

(٧ + هـ) ÷ ٢ = ٥ ← ٧ + هـ = ١٠ ← هـ = ٣

(٧، ٠) ∈ الدالة ، (٣، ٠) ∈ الدالة ، محور التماثل س = ٥

حاول أنت بقى تكمل الباقي

الدالة على صورة $\boxed{أ س^2 + ب س + جـ}$ شوف هتجيب قيمة أ، ب، جـ إزاي

الوحدة الثانية ① النسبة والتناسب

أخذنا فى سنة السادس الابتدائى لو كان عندى عددين أ ، ب
يجيب النسبة بنهم أ ، ب او $\frac{أ}{ب}$ عام و أ أو سمه مقدم النسبة
ب يسمى تالى النسبة

خواص النسبة

① ممكن أضرب حدى النسبة × أى عدد بدون النسبة تتغير
$\frac{٣}{٤} \rightarrow \frac{٣ \times ٢}{٤ \times ٢} = \frac{٦}{٨}$

ممكن أقسم حدى النسبة ÷ أى عدد
$\frac{٤}{٨} \rightarrow \frac{٤ \div ٤}{٨ \div ٤} = \frac{١}{٢}$

① قيمة النسبة لا تتغير إذا ضُرب أو قسم حداها على أى عدد حقيقى لا يساوى صفر

② هل لو جمعت أو طرحت من حدى النسبة أى عدد النسبة هتتغير أم لا
$\frac{٣}{٤} \rightarrow$
$\frac{٣+١}{٤+١} = \frac{٤}{٥}$ هل $= \frac{٣}{٤} = \frac{٤}{٥}$ ✗
$\frac{٣-١}{٤-١} = \frac{٢}{٣}$ هل $\frac{٣}{٤} = \frac{٢}{٣}$ ✗

② قيمة النسبة تتغير إذا أضيف الى حديها أو طرح منهما عدد حقيقى لا يساوى صفر

التناسب

هو تساوى نسبتين أو أكثر
تكون كميات متناسبة
مثلا عندى $\frac{أ}{ب} = \frac{ﺣ}{ء}$ وعليه أ ، ب ، ﺣ ، ء
نسبة = نسبة

أ يسمى بالأول المتناسب
ﺣ بالثالث المتناسب
ب بالثانى المتناسب
ء بالرابع المتناسب

خواص التناسب

① إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ﺣ}{ء}$ فإن $أ \times ء = ب \times ﺣ$ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

② إذا كان $أ \times ء = ب \times ﺣ$ فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{ﺣ}{ء}$ فاكرين مرجعش فاضى

يعنى لو قولت $\frac{ء}{ب} = \frac{ﺣ}{أ}$ عام $\frac{أ}{ﺣ} = \frac{ب}{ء}$ ، $\frac{ب}{أ} = \frac{ء}{ﺣ}$

$أ \times ء = ب \times ﺣ$ برضو مرجعش فاضى

مهندسة
جيهان محمد

③ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$ = $\frac{\text{مقدم النسبة الأولى}}{\text{مقدم النسبة الثانية}} = \frac{\text{تالي النسبة الأولى}}{\text{تالي النسبة الثانية}}$

$\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٥}$ فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$

④ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أ = جـ م ، ب = د م حيث م ثابت ≠ صفر

$\frac{أ}{ب} = \frac{٧}{٨}$ فإن أ = ٧ م ، ب = ٨ م أو أي رمز آخر غير م

الخلاصة

$\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٢}$ ← ٢أ = ٣ب أو أ = ٣م ، ب = ٢م

أو $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٢}$ كل دول صور مختلفة $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٢}$ بستخدمهم

في حل المسائل

مثال أكمل ما يأتي

① إذا كانت الكميات أ ، ب ، جـ ، د متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ......

② الرابع المتناسب للأعداد ٤ ، ١٢ ، ١٦ ، ..... هو ....

نفرض أن الرابع س ∴ $\frac{٤}{١٢} = \frac{١٦}{س}$ ← حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٤س = ١٢ × ١٦ ∴ س = $\frac{١٦ \times \cancel{١٢}^{٣}}{\cancel{٤}}$ = ٤٨

③ إذا كانت ٣ ، أ - ١ ، أ + ١ ، ٥ متناسبة أوجد أ = ...

$\frac{٣}{أ - ١} = \frac{أ + ١}{٥}$ ← (أ - ١)(أ + ١) = ١٥ ← أ² - ١ = ١٥

∴ أ² = ١٦ ← أ = ± $\sqrt{١٦}$ = ± ٤

④ قسم مبلغ بين شخصين بنسبة ٢ : ٣ فإذا كان نصيب أولهما ٣٠ جنيه فإن نصيب الآخر = ...

$\frac{٢}{٣} = \frac{٣٠}{س}$ ← ٢س = ٣٠ × ٣ ← س = $\frac{٣ \times \cancel{٣٠}^{١٥}}{\cancel{٢}}$ = ٤٥

⑤ إذا كان ٧ س = ٣ ص فإن $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٧}$ ......

مرجعش فاهم $\frac{٣}{٧}$

مهندسة ا/منى أحمد

⑥ إذا كان ٥أ - ٤ب = صفر فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

٥أ = ٤ب ← $\frac{أ}{ب} = \frac{٤}{٥}$

(٧) إذا كان $\frac{٥أ - ٧ب}{٨أ + ١١ب}$ = صفر فإن $\frac{ب}{أ}$ = ------

$\frac{٥أ - ٧ب}{٨أ + ١١ب}$ = صفر ← البسط = صفر ∴ ٥أ − ٧ب = صفر

٥أ = ٧ب ∴ $\frac{ب}{أ} = \frac{٥}{٧}$

(٨) إذا كان $\frac{٣أ}{٥ب} = \frac{١}{٢}$ فإن $\frac{أ}{ب}$ = ------

٦أ = ٥ب ← $\frac{أ}{ب} = \frac{٥}{٦}$

(٩) إذا كان ٤س = ٥ص فإن $\frac{٥ص}{٤س}$ = ١

(١٠) إذا كان ٣أ = ٥ب فإن $\frac{٣أ}{ب}$ = ٥

(١١) إذا كان ٣س = ٧ص فإن $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-١}$ = ------

$\left(\frac{س}{ص}\right)^{-١} = \frac{ص}{س} = \frac{٣}{٧}$

(١٢) إذا كان ٥أ ، ٢ ، ٣ب ، ٧ أربع كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب}$ = ------

$\frac{٥أ}{٢} = \frac{٣ب}{٧}$ ← ٣٥أ = ٦ب ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{٦}{٣٥}$

(١٣) إذا كان ٤س^٢ = ٩ص^٢ فإن $\frac{س}{ص}$ = ------

$\frac{س^٢}{ص^٢} = \frac{٩}{٤}$ ← $\left(\frac{س}{ص}\right)^٢ = \frac{٩}{٤}$ ∴ $\frac{س}{ص} = \pm\sqrt{\frac{٩}{٤}} = \pm\frac{٣}{٢}$

(١٤) إذا كان $\frac{أ + ٢ب}{أ - ب} = \frac{٢}{٣}$ فإن $\frac{ب}{أ}$ = ------

٣أ + ٦ب = ٢أ − ٢ب ← أ = −٢ب − ٦ب ← أ = −٨ب

∴ $\frac{ب}{أ} = \frac{-١}{٨}$

مهندسة/ جنا أحمد

(١٥) إذا كان ٤س^٢ + ٩ص^٢ = ١٢ س ص فإن $\frac{س}{ص}$ = $\frac{٣}{٢}$

٤س^٢ + ٩ص^٢ = ١٢س ص ← ٤س^٢ − ١٢س ص + ٩ص^٢ = صفر

٢ × ٣ × ٢ = ١٢

فاكرين التحليل (٢س − ٣ص)^٢ = صفر ← ٢س − ٣ص = صفر ← ٢س = ٣ص

مثال أثبت أن $أ، ب، جـ، د$ كميات متناسبة إذا كان

$$\frac{أ+ب}{ب} = \frac{جـ+د}{د}$$

الحل

علشان تكون كميات متناسبة يبقى عايز أثبت $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ازاى

$$\frac{أ+ب}{ب} = \frac{جـ+د}{د} \leftarrow أ \times د + \cancel{ب \times د} = ب \times جـ + \cancel{ب \times د}$$

$$\therefore أ \times د = ب \times جـ \leftarrow \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$$

$\because \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ $\therefore$ $أ، ب، جـ، د$ كميات متناسبة

مثال إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{2}{3}$ أوجد قيمة النسبة $\frac{3س + 2ص}{6ص - س}$

الحل

مهندسة/ هنا أحمد

النوع ده من المسائل هعمل فيه أية $\frac{س}{ص} = \frac{2}{3} \leftarrow \boxed{س = 2م ، ص = 3م}$

وبعدين أعوض

$$\frac{3س + 2ص}{6ص - س} = \frac{3 \times 2م + 2 \times 3م}{6 \times 3م - 2م} = \frac{6م + 6م}{18م - 2م} = \frac{\cancel{12م}}{\cancel{16م}} = \frac{3}{4}$$

مثال إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{3}{4}$ فأوجد قيمة $7أ + 9ب : 4أ + 2ب$

الحل

نفس المثال السابق بالضبط حاول تحله

مثال أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة $7:11$ فإنها تصبح $2:3$

الحل

أهم حاجة فى النوع ده أفهم السؤال وأعرف أترجمه إلى شكل نسب

$\frac{7}{11}$ نفرض أن العدد س $\therefore$ $\boxed{\frac{7+س}{11+س} = \frac{2}{3}}$

$\therefore 21 + 3س = 22 + 2س \leftarrow س = 1$ أجمع السين لوحدة والأعداد لوحدها

مثال أوجد العدد الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{49}{69}$ أصبحت $\frac{2}{3}$

الحل

نفرض أن العدد س ثلاثة أمثاله $3س$

$$\frac{49 - 3س}{69 - 3س} = \frac{2}{3} \leftarrow 147 - 9س = 138 - 6س$$

$\therefore 9 = 3س \leftarrow س = 3$ العدد هو 3

مثال أوجد العدد الذي إذا أضيف مربعه إلى كل من حدي النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

الحل

نفرض أن العدد س، مربعه = س² ∴ $\boxed{\frac{٧ + س^2}{١١ + س^2} = \frac{٤}{٥}}$ كمل أنت

مثال عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ إذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ أوجد العددين

الحل

نفرض أن العددين هما س، ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٧}$

لو طرحت منهم ٥ أصبحت النسبة ١ : ٣

∴ $\frac{س - ٥}{ص - ٥} = \frac{١}{٣}$ مش هعرف أتصرف كدة هيبقى عندي مجهولين س، ص طيب هعمل أية عندي $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٧}$ ∴ س = ٣م ، ص = ٧م

∴ $\frac{٣م - ٥}{٧م - ٥} = \frac{١}{٣}$ ⟵ ٩م − ١٥ = ٧م − ٥ ∴ ٢م = ١٠ ∴ م = ٥

تمام كده بقى أقدر أجيب العددين الأول = ٣م = ١٥

العدد الثاني = ٧م = ٣٥

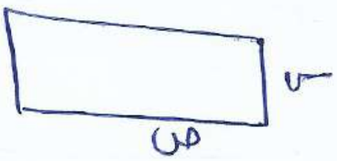
مثال عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ إذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثاني ١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣ أوجد العددين

الحل

نفس التفكير $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{س + ٧}{ص - ١٢} = \frac{٥}{٣}$ كمل الحل

مثال مستطيل النسبة بين بعديه ٤ : ٧ ومحيطه ٨٨ سم أوجد مساحته

الحل



$\frac{س}{ص} = \frac{٤}{٧}$ ، ٢ × (س + ص) = ٨٨

∴ س = ٤م ، ص = ٧م

٢ × (٤م + ٧م) = ٨٨ ⟵ ٢٢م = ٨٨ ∴ م = ٤

س = ٤ × ٤ = ١٦ ، ص = ٧ × ٤ = ٢٨ مهندسة / جنا أحمد

∴ بعد المستطيل هما ١٦ سم ، ٢٨ سم

مساحته = ١٦ × ٢٨ = ٤٤٨ سم²

② تابع خواص التناسب

أخذنا الدرس السابق خواص التناسب والزيادة هنكمل باقي الخواص

① إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن $\text{أ} \times \text{د} = \text{ب} \times \text{جـ}$

② إذا كان $\text{أ} \times \text{د} = \text{ب} \times \text{جـ}$ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ أو $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$ أو $\frac{\text{د}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

③ إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن $\frac{\text{مقدم النسبة الأولى}}{\text{مقدم النسبة الثانية}} = \frac{\text{تالي الأولى}}{\text{تالي الثانية}} \Leftarrow \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

④ إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن $\text{أ} = \text{جـ}\,\text{م}$ ، $\text{ب} = \text{د}\,\text{م}$

⑤ إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{ك}$ فإن $\text{أ} = \text{ب}\,\text{ك}$ ، $\text{جـ} = \text{د}\,\text{ك}$

مثال إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{5}{6}$

فإن $\text{أ} = \frac{5}{6}\,\text{ب}$ ، $\text{جـ} = \frac{5}{6}\,\text{د}$

⑥ إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} \Leftarrow$ فإن $\frac{\text{م}_1\text{أ} + \text{م}_2\text{جـ} + \text{م}_3\text{هـ}}{\text{م}_1\text{ب} + \text{م}_2\text{د} + \text{م}_3\text{و}} = \text{إحدى النسب}$

مفاهيم هامة :

أخذنا خاصية إنك ممكن أضرب حدى النسبة × أي عدد صح

يعني ممكن أضرب أول نسبة × م_1 ← $\boxed{\frac{\text{م}_1\text{أ}}{\text{م}_1\text{ب}}}$ وكذلك النسبة الثانية × م_2 $\boxed{\frac{\text{م}_2\text{جـ}}{\text{م}_2\text{د}}}$

والنسبة الثالثة في م_3 ← $\boxed{\frac{\text{م}_3\text{هـ}}{\text{م}_3\text{و}}}$ لو جمعت

يبقى مقدمات وتوالي النسب الثلاثة = إحدى النسب

$$\frac{\text{م}_1\text{أ} + \text{م}_2\text{جـ} + \text{م}_3\text{هـ}}{\text{م}_1\text{ب} + \text{م}_2\text{د} + \text{م}_3\text{و}} = \text{إحدى النسب}$$

تعالوا نشوف أمثلة أفضل

أكمل ما يأتي ① إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{3}{5}$ فإن $\frac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{د}} = \boxed{\frac{3}{5}}$

الحل

شوف كده البسط أ+جـ يبقى جمع المقدمات تمام نشوف كده التالي ب+د بردو جمع $\therefore \frac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{د}} = \text{إحدى النسب} = \frac{3}{5}$

② إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \frac{٣}{٥}$ فإن $\frac{أ - ٢جـ + هـ}{ب - ٢د + و} =$ ------

الحل

أشوف البسط برضو عمل أيه ضرب النسبة الثانية × -٢ وبعدين جمع المقدمات

يبقى هعمل أيه هقول له بضرب حدى النسبة الثانية × -٢ وجمع المقدمات والتوالى النسب الثلاثة

$$\frac{جـ}{د} \leftarrow \frac{-٢جـ}{-٢د}$$

$$\frac{أ - ٢جـ + هـ}{ب - ٢د + و} = \text{إحدى النسب} = \frac{٣}{٥}$$

③ إذا كان $\frac{٤}{س} = \frac{٧}{ص} = \frac{أ}{ص - س}$ فإن أ = ------

الحل

هتصدق إزاى هو عايز البسط أ طيب أشوف عمل أيه في المقام ضرب النسبة الأولى × -١ وجمع تام يبقى هعمل كده برضو في البسط

$$\frac{٤}{س} = \frac{٧}{ص} = \frac{٧ - ٤}{ص - س} = \frac{٣}{ص - س} \quad \therefore أ = ٣$$

④ $\frac{ل}{٣} = \frac{م}{٨} = \frac{ل + \frac{١}{٢}م}{\cdots\cdots}$

مهندسة/ أمنى أحمد

الحل

ضرب النسبة الثانية × $\frac{١}{٢}$ وبعدين جمع

$$\therefore \frac{ل}{٣} = \frac{م}{٨} = \frac{ل + \frac{١}{٢}م}{٣ + \frac{١}{٢} \times ٨} = \frac{ل + \frac{١}{٢}م}{٣ + ٤} = \frac{ل + \frac{١}{٢}م}{٧}$$

⑤ إذا كان $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٧}$ فإن ٧أ - ٥ب + ٣ = ------

الحل

$$\therefore ٧أ = ٥ب \leftarrow ٧أ - ٥ب = \text{صفر} \leftarrow ٧أ - ٥ب + ٣ = ٣$$

⑥ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{أ}{جـ} = \frac{٤}{٥}$ فإن ب : جـ = ------

الحل

أ = $\frac{٢}{٣}$ ب من النسبة الأولى ، أ = $\frac{٤}{٥}$ جـ من النسبة الثانية

$$\therefore \frac{٢}{٣}ب = \frac{٤}{٥}جـ \leftarrow ب : جـ = \frac{٤}{٥} : \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٦}{٥}$$

إذا كان $\frac{س}{1} = \frac{ص}{2} = \frac{ع}{3}$ أثبت أن $\frac{س + ص - 2ع}{س - 3ع} = \frac{3}{8}$

الحل

أشوف البسط: ضرب النسبة الثالثة × −2 وجمع تمام

بضرب النسبة الثالثة في −2 وجمع المقدمات والتوالى للنسب الثلاثة

$\therefore \frac{س + ص - 2ع}{1 + 2 - 6} = \frac{س + ص - 2ع}{-3} =$ إحدى النسب ← (1)

تمام س كدة ناقص المقام هعمل ايه هو ضرب النسبة الثالثة × −3 وجمع الأولى والثالثة

∴ بضرب النسبة الثالثة × −3 وجمع المقدمات والتوالى للنسبة الأولى والثالثة

$\therefore \frac{س - 3ع}{1 - 9} = \frac{س - 3ع}{-8} =$ إحدى النسب ← (2)

من (1)، (2) $\Leftarrow \frac{س + ص - 2ع}{-3} = \frac{س - 3ع}{-8}$ $\frac{مقدم}{مقدم} = \frac{تالى}{تالى}$

$\therefore \frac{س + ص - 2ع}{س - 3ع} = \frac{-3}{-8} \Leftarrow \frac{س + ص - 2ع}{س - 3ع} = \frac{3}{8}$

إذا كان $\frac{أ}{4س + ص} = \frac{ب}{س - 4ص}$ أثبت أن $\frac{أ + ب}{5س - 3ص} = \frac{أ - ب}{3س + 5ص}$

الحل

بجمع مقدمات وتوالى النسبتين

$\frac{أ + ب}{4س + ص + س - 4ص} =$ إحدى النسب ← $\frac{أ + ب}{5س - 3ص} =$ إحدى النسب ← (1)

بضرب النسبة الثانية × −1 وجمع المقدمات والتوالى

$\frac{أ - ب}{4س + ص - س + 4ص} = \frac{أ - ب}{3س + 5ص} =$ إحدى النسب ← (2)

مهندس/ أحمد

من (1)، (2) ينتج أن $\frac{أ + ب}{5س - 3ص} = \frac{أ - ب}{3س + 5ص}$

نوع آخر من المسائل

إذا كانت أ، ب، جـ، د كميات متناسبة (1) أثبت أن $\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{جـ}+\text{د}}\right)^2 = \frac{2\text{أ}^2-3\text{ب}^2}{2\text{جـ}^2-3\text{د}^2}$

الحل

∵ أ، ب، جـ، د كميات متناسبة

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{ك} \leftarrow \text{أ} = \text{ب ك} ، \text{جـ} = \text{د ك}$

الطرف الأيمن $= \left(\frac{\text{ب ك} + \text{ب}}{\text{د ك} + \text{د}}\right)^2 = \left[\frac{\text{ب}(\cancel{\text{ك}+1})}{\text{د}(\cancel{\text{ك}+1})}\right]^2 = \left(\frac{\text{ب}}{\text{د}}\right)^2 \leftarrow (1)$

الطرف الأيسر $= \frac{2\text{ب}^2\text{ك}^2-3\text{ب}^2}{2\text{د}^2\text{ك}^2-3\text{د}^2} = \frac{\text{ب}^2(\cancel{2\text{ك}^2-3})}{\text{د}^2(\cancel{2\text{ك}^2-3})} = \frac{\text{ب}^2}{\text{د}^2} = \left(\frac{\text{ب}}{\text{د}}\right)^2 \leftarrow (2)$

من (1)، (2) ∴ $\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{جـ}+\text{د}}\right)^2 = \frac{2\text{أ}^2-3\text{ب}^2}{2\text{جـ}^2-3\text{د}^2}$

مهندسة/ أ/ [illegible]

(2) $\frac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{د}} = \sqrt[3]{\frac{5\text{أ}^3-3\text{جـ}^3}{5\text{ب}^3-3\text{د}^3}}$

الحل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{ك} \leftarrow \text{أ} = \text{ب ك} ، \text{جـ} = \text{د ك}$

الطرف الأيمن $= \sqrt[3]{\frac{5\text{ب}^3\text{ك}^3-3\text{د}^3\text{ك}^3}{5\text{ب}^3-3\text{د}^3}} = \sqrt[3]{\frac{\text{ك}^3(\cancel{5\text{ب}^3-3\text{د}^3})}{\cancel{5\text{ب}^3-3\text{د}^3}}} = \sqrt[3]{\text{ك}^3}$

$= \text{ك} \leftarrow (1)$

الطرف الأيسر $= \frac{\text{ب ك} + \text{د ك}}{\text{ب}+\text{د}} = \text{ك}\left(\frac{\cancel{\text{ب}+\text{د}}}{\cancel{\text{ب}+\text{د}}}\right) = \text{ك} \leftarrow (2)$

∴ من (1)، (2) ⇐ الطرفان متساويان

(3) $\frac{3\text{أ}-2\text{جـ}}{5\text{أ}+3\text{جـ}} = \frac{3\text{ب}-2\text{د}}{5\text{ب}+3\text{د}}$

الحل

جرب أنت

إذا كان $\frac{\text{س}+\text{ص}}{5} = \frac{\text{ص}+\text{ع}}{8} = \frac{\text{ع}+\text{س}}{7}$ **أثبت أن** $\frac{\text{س}}{2} = \frac{\text{ص}}{3} = \frac{\text{ع}}{5}$

الحل

هنشغل نسبة نسبة يعني عايز $\frac{\text{س}}{2}$ هجيبها إزاي لو ضربت النسبة الثانية × -1 وجمعت

$\frac{\text{س}+\cancel{\text{ص}}-\cancel{\text{ص}}-\cancel{\text{ع}}+\cancel{\text{ع}}+\text{س}}{5-8+7} = \frac{2\text{س}}{4} = \frac{\text{س}}{2} =$ إحدى النسب كذلك الباقي كمل حل

③ التناسب المتسلسل

أخدنا قبل كدة درس التناسب بس صح قولنا لو كان عندي أ ، ب ، جـ ، د في تناسب

$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ ومنها أ = ب م ، جـ = د م تمام كدة

* طيب لو حد قال أ ، ب ، جـ في تناسب هعمل أية

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{???}$ مش هينفع أعمل كدة فقالوا خلاص بيقى دول في تناسب أو تناسب متسلسل نعمله كدة (أ ، ب ، جـ)

$\boxed{\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}}$ تمام ونعديه

وهنسمي أ بالأول المتناسب ، ب بالوسط المتناسب
جـ بالثالث المتناسب

لو عملت طرفين × وسطين ⟸ ب² = أ جـ ⟵ $\boxed{\text{ب} = \pm\sqrt{\text{أ جـ}}}$ ⟵ الوسط المتناسب

طيب لو قولنا $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$

∴ ب = جـ م ، أ = ب م ⟸ أ = جـ م × م = جـ م² تمام خالص

* طيب لو كان عندي أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

خد بالك في فرق بين تناسب وتناسب متسلسل لـ ٤ كميات

$\boxed{\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}} = \text{م}$

∴ جـ = د م ، ب = د م² ، أ = د م³

بدأت من الآخر وكل مرة أزود أس م

الخلاصة ① لو قال أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل أو
أ ، ب ، جـ كميات متناسبة أو
ب وسط متناسب بين أ ، جـ كل ده نفس المعنى

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$ ⟸ ب = جـ م ، أ = جـ م² ، ب = ± $\sqrt{\text{أ جـ}}$

② لو قال أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ ⟸ جـ = د م ، ب = د م² ، أ = د م³

تعالوا نشوف أمثلة

أوجد الوسط المتناسب ① ٣ ، ٢٧

الحل

٣ ، س ، ٢٧   فرضت أن الوسط المتناسب س

$\frac{٣}{س} = \frac{س}{٢٧} \Leftarrow س^2 = ٣ \times ٢٧$ $\therefore س = \pm\sqrt{٣\times٢٧} = \pm ٩$

ممكن نحلها على طول الوسط المتناسب $= \pm\sqrt{٣\times٢٧} = \pm ٩ \leftarrow$ زي ضرب القانون $\boxed{ب = \pm\sqrt{أجـ}}$

② -٢ ، -٨

الحل

الوسط المتناسب $= \pm\sqrt{-٢\times -٨} = \pm\sqrt{١٦} = \pm ٤$

أوجد الثالث المتناسب ① ٩ ، -١٢

الحل :

$\frac{٩}{-١٢} = \frac{-١٢}{س} \Leftarrow س = \frac{-١٢\times -١٢}{٩} = ١٦$

إذا كان ٦ هو الوسط المتناسب الموجب للعددين أ ، ٢ فإن أ = ...

الحل

$\frac{أ}{٦} = \frac{٦}{٢} \Leftarrow أ = \frac{٦\times٦}{٢} = ١٨$

إذا كانت ب وسط متناسب بين أ ، جـ فأثبت أن $\frac{٢أ+٣ب}{٢ب+٣جـ} = \frac{أ}{ب}$

الحل

$\because$ ب وسط متناسب بين أ ، جـ $\Leftarrow \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

$\therefore ب = جـ م \quad ، \quad أ = جـ م^2$

الطرف الأيمن $= \frac{٢أ+٣ب}{٢ب+٣جـ} = \frac{٢\times جـ م^2 + ٣\times جـ م}{٢\times جـ م + ٣جـ} = \frac{\cancel{جـ} م(\cancel{٢م+٣})}{\cancel{جـ}(\cancel{٢م+٣})} = م$

الطرف الأيسر $= \frac{أ}{ب} = \frac{\cancel{جـ} م^2}{\cancel{جـ} م} = م$

$\therefore$ الطرفان متساويان

مهندسة إيناس محمد

③ أثبت $\frac{أ^2+ب^2}{ب^2+جـ^2} = \frac{أ}{جـ}$ نفس الفكرة $\boxed{\text{حل أنت بقى}}$

الحل

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م \leftarrow ب = جـ م \quad ، \quad أ = جـ م^2$

الطرف الأيمن $= \frac{(جـ م^2)^2 + (جـ م)^2}{(جـ م)^2 + جـ^2} = \frac{جـ^2 م^4 + جـ^2 م^2}{جـ^2 م^2 + جـ^2} = \frac{\cancel{جـ^2} م^2(\cancel{م^2+١})}{\cancel{جـ^2}(\cancel{م^2+١})} = م^2$

② $\frac{\text{أ}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ب}^2}{\text{حـ}^2}=\frac{2\text{أ}}{\text{حـ}}$

الحل

$\because$ ب وسط متناسب بين أ ، حـ $\leftarrow \frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{حـ}}=\text{م}$

ب = حـ م ، أ = حـ م٢

الطرف الأيمن $=\frac{\text{أ}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ب}^2}{\text{حـ}^2}=\frac{(\text{حـ م}^2)^2}{\text{حـ}^2\text{م}^2}+\frac{\text{حـ}^2\text{م}^2}{\text{حـ}^2}=\frac{\cancel{\text{حـ}^2}\text{م}^4}{\cancel{\text{حـ}^2}\cancel{\text{م}^2}}+\frac{\text{حـ}^2\text{م}^2}{\text{حـ}^2}$

$=\text{م}^2+\text{م}^2=2\text{م}^2$

الطرف الأيسر $=\frac{2\text{أ}}{\text{حـ}}=\frac{2\cancel{\text{حـ}}\text{م}^2}{\cancel{\text{حـ}}}=2\text{م}^2$

$\therefore$ الطرفان متساويان

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{حـ}}=\frac{\text{حـ}}{5}=2$ فإن أ = - - - - -

الحل مستر/ أحمد

$\text{أ}=5\times2^3=5\times8=40$

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{حـ}}=\frac{\text{حـ}}{\text{د}}=2$ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{د}}=$ - - - -

الحل

$\text{أ}=\text{د}\times2^3 \leftarrow \text{أ}=8\text{د} \quad \therefore \frac{\text{أ}}{\text{د}}=\frac{8}{1}=8$

إذا كان أ ، ٢ ، ٤ ، ب في تناسب متسلسل فإن أ + ب = - - - - -

الحل

$\boxed{\frac{\text{أ}}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{\text{ب}}} \leftarrow \text{أ}\times4=2\times2 \leftarrow \text{أ}=1$

$\text{ب}\times2=4\times4 \leftarrow \text{ب}=8$

$\therefore \text{أ}+\text{ب}=9$

إذا كان ٣ ، ل ، ١٢ ، م في تناسب متسلسل أوجد قيمة ل ، م

الحل

$\frac{3}{\text{ل}}=\frac{\text{ل}}{12}=\frac{12}{\text{م}} \leftarrow \text{ل}^2=3\times12 \leftarrow \text{ل}=\pm\sqrt{36}=\pm6$

عند $\text{ل}=6 \leftarrow \frac{6}{12}=\frac{12}{\text{م}} \leftarrow \text{م}=\frac{12\times12}{6}=24$

عند $\text{ل}=-6 \leftarrow \frac{-6}{12}=\frac{12}{\text{م}} \leftarrow \text{م}=\frac{12\times12}{-6}=-24$

إذا كانت أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل أثبت

$$\sqrt[3]{\frac{5\text{أ}^3-3\text{جـ}^3}{5\text{ب}^3-3\text{د}^3}}=\frac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{د}}$$

الحل

$\because$ أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل $\therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}=\frac{\text{جـ}}{\text{د}}=\text{م}$

$\text{جـ}=\text{د}\text{م}$ ، $\text{ب}=\text{د}\text{م}^2$ ، $\text{أ}=\text{د}\text{م}^3$

الطرف الأيمن $=\sqrt[3]{\frac{5(\text{د}\text{م}^3)^3-3(\text{د}\text{م})^3}{5(\text{د}\text{م}^2)^3-3\text{د}^3}}=\sqrt[3]{\frac{5\text{د}^3\text{م}^9-3\text{د}^3\text{م}^3}{5\text{د}^3\text{م}^6-3\text{د}^3}}=\sqrt[3]{\frac{\cancel{\text{د}^3}\text{م}^3\cancel{(5\text{م}^6-3)}}{\cancel{\text{د}^3}\cancel{(5\text{م}^6-3)}}}$

$=\sqrt[3]{\text{م}^3}=\text{م}$

الطرف الأيسر $=\frac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{د}}=\frac{\text{د}\text{م}^3+\text{د}\text{م}}{\text{د}\text{م}^2+\text{د}}=\frac{\cancel{\text{د}}\text{م}\cancel{(\text{م}^2+1)}}{\cancel{\text{د}}\cancel{(\text{م}^2+1)}}=\text{م}$

$\therefore$ الطرفان متساويان

إذا كان ٥أ، ٦ب، ٧جـ، ٨د كميات موجبة في تناسب متسلسل فأثبت أن

$$\sqrt[3]{\frac{5\text{أ}}{8\text{د}}}=\frac{5\text{أ}+6\text{ب}}{7\text{جـ}+8\text{د}}$$

مهندسة / إيمان أحمد

الحل

$\frac{5\text{أ}}{6\text{ب}}=\frac{6\text{ب}}{7\text{جـ}}=\frac{7\text{جـ}}{8\text{د}}=\text{م} \Leftarrow 7\text{جـ}=8\text{د}\text{م}$ ، $6\text{ب}=8\text{د}\text{م}^2$

$5\text{أ}=8\text{د}\text{م}^3$

الطرف الأيمن $=\sqrt[3]{\frac{5\text{أ}}{8\text{د}}}=\sqrt[3]{\frac{\cancel{8\text{د}}\text{م}^3}{\cancel{8\text{د}}}}=\sqrt[3]{\text{م}^3}=\text{م}$

الطرف الأيسر $=\frac{5\text{أ}+6\text{ب}}{7\text{جـ}+8\text{د}}=\frac{8\text{د}\text{م}^3+8\text{د}\text{م}^2}{8\text{د}\text{م}+8\text{د}}=\frac{\cancel{(\text{م}+1)}\,\text{م}^2\cancel{8\text{د}}}{\cancel{(\text{م}+1)}\cancel{8\text{د}}}=\text{م}^2$

$=\text{م}$

$\therefore$ الطرفان متساويان

إذا كان $\frac{\text{أ}^2+\text{ب}^2}{\text{ب}^2}=\frac{\text{ب}^2+\text{جـ}^2}{\text{جـ}^2}$ أثبت أن ب وسط متناسب بين أ، جـ حيث أ جـ كمية موجبة

الحل :

علشان ب تكون وسط متناسب بين أ ، جـ ← يبقى عندي $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ أو

$\text{ب}^2=\text{أ}\text{جـ}$ تمام يبقى أنا هشتغل أني أثبت $\text{ب}^2=\text{أ}\text{جـ}$

$\because \frac{أ^2+ب^2}{ب^2} = \frac{ب^2+جـ^2}{جـ^2} \leftarrow جـ^2(أ^2+ب^2) = ب^2(ب^2+جـ^2)$

$\therefore جـ^2أ^2 + \cancel{جـ^2ب^2} = ب^4 + \cancel{ب^2جـ^2} \leftarrow ب^4 = جـ^2 أ^2$

$\therefore ب^2 = جـ\,أ$ ∴ ب وسط متناسب بين أ ، جـ

إذا كان ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ أثبت أن $\frac{أ^4+ب^4+جـ^4}{أ^{-4}+ب^{-4}+جـ^{-4}} = ب^8$

الحل

جرب حلها

مهندسة/ منى أحمد

أثبت $\frac{أ+ب+جـ}{أ^{-1}+ب^{-1}+جـ^{-1}} = ب^2$

الحل

$\because \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م \leftarrow ب = جـ م \ ، \ أ = جـ م^2$

الطرف الأيمن $= \frac{جـ م^2 + جـ م + جـ}{(جـ م^2)^{-1} + (جـ م)^{-1} + جـ^{-1}} = \frac{جـ(م^2+م+1)}{جـ^{-1}م^{-2} + جـ^{-1}م^{-1} + جـ^{-1}}$

أيه ده يبقى لو أخذت $جـ^{-1}$ عامل مشترك

$= \frac{جـ(1+م+م^2)}{جـ^{-1}(م^{-2}+م^{-1}+1\,م^{صفر})}$ وبعدين ينفع أخذ $م^{-2}$ مشترك من المقام

$= \frac{جـ}{جـ^{-1}م^{-2}}\left(\frac{1+م+م^2}{م^2+م+1}\right) = جـ^{(1+1)} م^2 = جـ^2 م^2$

$\frac{م^1}{م^{-2}} = م^{1+2} = م^3$	$\frac{1}{م^{-1}} = م$
$\frac{م^{صفر}}{م^{-2}} = م^2$	$\frac{1}{م^{-2}} = م^2$

الطرف الأيسر $= ب^2 = جـ^2 م^2$

∴ الطرفان متساويان

حل آخر الطرف الأيمن $= \frac{جـ(1+م+م^2)}{جـ^{-1}(1+م^{-1}+م^{-2})} = \frac{جـ م^2(\cancel{1+م^{-1}+م^{-2}})}{جـ^{-1}(\cancel{1+م^{-1}+م^{-2}})}$ هاخد $م^2$ مشترك من البسط

$= جـ^2 م^2$

أوجد العدد الذي إذا طرح من الأعداد ٣ ، ٧ ، ١٩ فإنها تكون متناسبة

الحل

هنفرض إن العدد س ← ٣ - س ، ٧ - س ، ١٩ - س كميات متناسبة

$\frac{3-س}{7-س} = \frac{7-س}{19-س} \Leftarrow (3-س)(19-س) = (7-س)^2$

$\therefore 57 - 22س + \cancel{س^2} = 49 - 14س + \cancel{س^2} \Leftarrow 57 - 49 = -14س + 22س$

$8س = 8 \Leftarrow س = 1$ ∴ العدد هو ١

٤ التغير الطردى

درس اليوم بسيط بس محتاج شوية تركيز لأنه فى كذا نوع للمسائل وان شاء الله هنشرحهم كلهم تعالوا نشوف إية التغير الطردى ده

لو عندى مثلا متغيرين س ، ص

مهندسة / منا أحمد

مثلا س = ١ ← ذلاقى ص = ٢

س = ٢ ← ص = ٤

س = ٣ ← ص = ٦

س = ٤ ← ص = ٨

لاحظ كدة فى علاقة بين ص ، س ← ص = ٢ س

قالوا العلاقة دى هنسميها علاقة طردية وممكن نكتبها $\boxed{ص \propto س}$

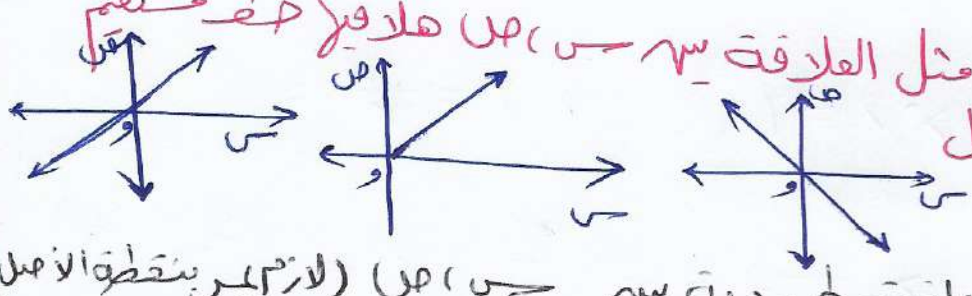
دى معناها ص تتغير طرديا مع س

ص ∝ س
ص = م س
$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$

ممكن أشيل ∝ وأضع مكانها (= م) حيث م ثابت ≠ صفر ثابت التناسب

دول كلهم يعبروا عن التغير الطردى عام

كمان لو رسمت العلاقة بين س ، ص هلاقيها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل



كل الأشكال دى تمثل علاقة طردية بين س ، ص (لازم يمر بنقطة الأصل)

تعالوا نشوف نقف المسائل

النوع الأول من المسائل

معطى ص ∝ س ومعطى قيم ص = ... و س = ... ونقول

اكتب العلاقة بين ص ، س يعنى عايز الشكل ده ص = م س

وعايز يجيب قيمة م نكام $\boxed{ص = عدد \times س}$ هى دى العلاقة عام

العدد (الثابت م) ممكن يكون سالب أو موجب أو كسر مافيش مشكلة

مثال إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢ فأوجد العلاقة بين ص ، س ② قيمة ص عندما س = ٦٠

الحل

عايز العلاقة ص = م س بس من المفروض أعرف قيمة م تماما

ازاى بقى هشتغل واحده واحدة هو بيقول

ص ∝ س — أشيل علامة التغير وأضع = م

ص = م س — أعوض بالقيمة ص ، س المعطى

١٤ = م × ٤٢ — أجيب قيمة م

م = $\frac{١٤}{٤٢}$ = $\frac{١}{٣}$ — أشيل م وأضع قيمتها ص = م س

∴ $\boxed{ص = \frac{١}{٣} س}$ ← هى دى العلاقة بين ص ، س

المطلوب الثانى سهل جدا

عند س = ٦٠ ← ∴ ص = $\frac{١}{٣}$ × ٦٠ = ٢٠

مثال إذا كانت ص تتغير طرديا مع س وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٧ فأوجد س عندما ص = ٤٠

الحل

ص تتغير طرديا مع س

ص ∝ س

ص = م س ← ٢٠ = م × ٧ ← م = $\frac{٢٠}{٧}$ ⇐

ص = $\frac{٢٠}{٧}$ س عندما ص = ٤٠

٤٠ = $\frac{٢٠}{٧}$ × س ← س = ٤٠ × $\frac{٧}{٢٠}$ = ١٤ دى طريقة طويلة شوية

هو مش عايز العلاقة عايز س عندما = ٤٠

حل آخر

∵ ص تتغير طرديا مع س

$\boxed{\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}}$ خد بالك $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$ زى بعض

$\frac{٢٠}{٤٠} = \frac{٧}{س_2}$ ← $س_2 = \frac{٧ \times ٤٠}{٢٠}$ = ١٤

∴ س = ١٤ عندما ص = ٤٠

مثال إذا كانت ص ∝ $س^٣$ وكانت ص = ٦٤ عندما س = ٢
أوجد العلاقة بين س ، ص وأوجد قيمة ص عندما س = $\frac{١}{٢}$

الحل

أية ده ص ∝ $س^٣$
ص = م $س^٣$

دي $س^٣$ مش س ولا يهمني هعمل زي ما عملت مع س بس هشيل برضو ∝ وأضع مكانها = م وأكتب باقي الرموز زي ما هي

نعوض
$٦٤ = م \times (٢)^٣$
$٦٤ = م \times ٨ \leftarrow م = \frac{٦٤}{٨} = ٨$
∴ $\boxed{ص = ٨ س^٣}$ كدة جبت العلاقة

عندما س = $\frac{١}{٢}$ ← ∴ ص = $٨ \times (\frac{١}{٢})^٣ = ٨ \times \frac{١}{٨} = ١$

مثال إذا كانت $ص^٢$ ∝ $س^٣$ أوجد العلاقة بين س ، ص حيث ص = ٣ عندما س = ٢

الحل

مهندسة / إيمان أحمد

∵ $ص^٢$ ∝ $س^٣$
∴ $ص^٢$ = م $س^٣$ ← نعوض بـ ص = ٣ ، س = ٢
$(٣)^٢ = م (٢)^٣ \leftarrow م = \frac{٩}{٨}$
∴ $\boxed{ص^٢ = \frac{٩}{٨} س^٣}$ تمام كدة

مثال إذا كانت ص ∝ (س + ١) وكانت س = ٣ عندما ص = ٢
فأوجد العلاقة بين س ، ص

الحل

طبعا عرفنا هنعمل أية بسهولة جدا
ص ∝ (س + ١)
ص = م (س + ١) كمل أنت بقى

النوع الثاني من المسائل

بيقى عايز يثبت ص ∝ س بقى كدة أنا هفكر أحل إزاي لحد إما أوصل للعلاقة ص ÷ س = ثابت
بقى كدة ص ∝ س تمام

مثال إذا كان $\frac{٥س - ٣ص}{٣س + ٥ص} = ١$ حيث س ∈ ح ، ص ∈ ح أثبت ص ∝ س

الحل

هنشتغل لحد إما نوصل ص = عدد × س

$\frac{٥س - ٣ص}{٣س + ٥ص} = \frac{١}{١}$ ← ٥س − ٣ص = ٣س + ٥ص

٥س − ٣س = ٥ص + ٣ص ← ٢س = ٨ص ∴ ص = $\frac{٢}{٨}$ س

$\boxed{ص = \frac{١}{٤} س}$ كده تمام

∴ ص ∝ س

مثال إذا كان $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فأثبت أن ص ∝ ع

عايز أثبت ص = عدد × ع

الحل

$\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ ← ع(٢١س − ص) = ص(٧س − ع)

٢١س ع − $\cancel{ص ع}$ = ٧س ص − $\cancel{ص ع}$

٢١$\cancel{س}$ ع = ٧$\cancel{س}$ ص ← ص = $\frac{٢١}{٧}$ ع ← $\boxed{ص = ٣ع}$ تمام

∴ ص ∝ ع

النوع الثالث (الجدول)

مثال بين نوع التغير بين ص ، س ، أوجد ثابت التناسب

الحل

س	٥	١٠	١٥	٢٥	
ص	٩	١٨	٢٧	٤٥	

هو إحنا لحد دلوقت أخدنا النوع واحد بس تغير طردي

بقى هنشوف ده تغير طردي ولا إزاي

عندي في التغير الطردي $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$ تمام أو

ص = م س ← $\frac{ص}{س}$ = م يبقى هقسم كل قيمه واشوف الناتج

الأولى $\frac{٩}{٥}$ ، الثاني $\frac{١٨}{١٠} = \frac{٩}{٥}$ ، الثالث $\frac{٢٧}{١٥} = \frac{٩}{٥}$ ، الرابع $\frac{٤٥}{٢٥} = \frac{٩}{٥}$

∴ كلهم = $\frac{٩}{٥}$ تمام ∴ $\frac{ص}{س} = \frac{٩}{٥}$ ← ص = $\frac{٩}{٥}$ س

∴ ص تتغير طرديا مع س ، ثابت التناسب (م) = $\frac{٩}{٥}$ ∵ ص = م س

س	١	٢	ب	٤	٦
ص	١٢	أ	٣٦	٤٨	٧٢

مثال في الجدول المقابل

بين نوع التغير بين ص ، س أوجد قيمة أ ، ب

الحل

هعمل إيه هقسم $\frac{ص}{س}$ وأشوفها ثابت في كله ولا ... عندي أ ، ب مش مهم هاخد الباقي $\frac{١٢}{١} = ١٢$ ، $\frac{٤٨}{٤} = ١٢$ ، $\frac{٧٢}{٦} = ١٢$

$\therefore \frac{ص}{س} = ... = ١٢$ ، $\boxed{ص = ١٢ س}$ $\therefore ص \propto س$ سهل أجيب أ ، ب

لأن جبت العلاقة هعوض

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{عند } س = ٢ \leftarrow ص = ١٢ \times ٢ = ٢٤ \leftarrow \therefore أ = ٢٤ \\ \text{عند } ص = ٣٦ \leftarrow ٣٦ = ١٢ \times ب \leftarrow ب = ٣ \therefore ب = ٣ \end{array}}$$

النوع الرابع من المسائل

في الشكل من أول نوع عايز العلاقة بين س ، ص بس بنضيف معها حاجة زيادة وده عايز تركيز شوية صغيرة معادلة

مثال إذا كانت ص = أ + ب حيث أ ثابت ب تتغير طرديا بتغير س وكانت ص = ٣ عندما س = ... ص = ٥ عندما س = ٣ أوجد العلاقة بين س ، ص أوجد قيمة ص عند س = ٧

الحل

علشان متلخبطش هقسم الصفحة إلى جزئين جزء فيه العلاقة وجزء للمعادلة قال ب $\propto$ س ، ص = أ + ب

ب $\propto$ س

ب = م س

لا إله إلا أنت سبحانك إني كنت من الظالمين

أروح هنا وأعوض

$ص = أ + \boxed{ب}$

$ص = أ + م س$

معطى س ، ص نقسم هعوض تبلا

عند ص = ٣ ، س = صفر

$٣ = أ + \text{صفر}$

$\therefore أ = ٣$

$ص = ٣ + م س$

عند ص = ٥ ، س = ٣

$٥ = ٣ + م \times ٣ \leftarrow م = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \boxed{ص = ٣ + \frac{٢}{٣} س}$ هي دي العلاقة بين ص ، س

عند س = ٧

$ص = ٣ + \frac{٢}{٣} \times ٧ = ٧\frac{٢}{٣}$

مثال إذا كانت س = ل + ٩ وكانت ل ∝ ص فأوجد العلاقة بين ل ، ص علماً بأن س = ٢٤ عندما ص = ٥ ثم أوجد قيمة ص عندما ل = ١٢

الحل

ل ∝ ص

ل = م ص ← أعوض هنا

س = ل + ٩

س = م ص + ٩

عند س = ٢٤ ، ص = ٥

٢٤ = ٥م + ٩ ← م = ٣

$\boxed{\text{س} = ٣\text{ص} + ٩}$ س هو ش عايز العلاقة بين س ، ص

عايز بين ل ، ص جبت م صح

$\boxed{\text{ل} = ٣\text{ص}}$ هي دي العلاقة المطلوبة ← أعوض هنا

عند ل = ١٢

١٢ = ٣ص ← $\boxed{\text{ص} = ٤}$

هندسة / ابن أحمد

النوع الخامس: المسائل اللفظية

أهم حاجة هنا أفهم السؤال كويس أوي وأترجمه رياضياً

مثال تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طردياً مع الزمن فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلومتر في ٦ ساعات فكم كيلومتر تقطعها السيارة في ١٠ ساعات؟

الحل

المسافة تتناسب طردياً مع الزمن

ف ∝ ز ← ف = م ز

إذا كانت $ف_1 = ١٥٠$ كم ، $ز_1 = ٦$ ساعات

$ف_2 = ؟؟$ ، $ز_2 = ١٠$ ساعات

$$\therefore \frac{ف_1}{ف_2} = \frac{ز_1}{ز_2} \leftarrow \frac{١٥٠}{ف_2} = \frac{٦}{١٠} \leftarrow ف_2 = \frac{١٠ \times ١٥٠}{٦} = ٢٥٠ \text{ كم}$$

∴ السيارة سوف تقطع مسافة ٢٥٠ كم في ١٠ ساعات

مثال إذا كانت المسافة التي تقطعها دراجة بخارية في تتغير طردياً بتغير مربع الزمن (ن) وكانت ف = $\frac{٨١}{١٦}$ كم عندما ن = $\frac{١}{٤}$ ساعة فأوجد قيمة ن عندما ف = ١٤٤ كم

الحل

المسافة تتغير طردياً مع مربع الزمن

ف ∝ $ن^2$

ف = م $ن^2$

أخد بالي مربع الزمن

$$\boxed{\frac{ف_1}{ف_2} = \frac{ن_1^2}{ن_2^2}} \leftarrow \frac{\frac{٨١}{١٦}}{١٤٤} = \frac{(\frac{١}{٤})^2}{ن_2^2} \Leftarrow \text{أختصر} \quad ن_2 = \frac{٤}{٣} \text{ ساعة}$$

آخر درس في الجبر بالتوفيق

⑤ التغير العكسي

أخذنا الدرس السابق التغير الطردي هنا أخد بقى النازِدة التغير العكسي بنفس أفكار الدرس السابق

التغير العكسي	التغير الطردي
$ص \propto \frac{1}{س}$ ← لأنه عكسي فعكسنا بدل س تبقى $\frac{1}{س}$	$ص \propto س$
$ص = \frac{م}{س}$ بنضرب بدل ∝ أشيلها وأضع = م	$ص = م س$
$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$ عكس عكست لبرضو $\frac{س_2}{س_1}$	$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$
$ص س = م$ حيث م ثابت ≠ صفر	$\frac{ص}{س} = م$
دول كلهم يعبروا عن التغير العكسي	دول برضو يعبروا عن التغير الطردي

تعالوا نشوف المسائل

النوع الأول

معطى $ص \propto \frac{1}{س}$ ومطلوب العلاقة يعني عايز $\boxed{ص = \frac{كام}{س}}$

مثال إذا كانت $ص \propto \frac{1}{س}$ وكانت $ص = ٣$ عندما $س = ٢$
أوجد العلاقة بين س ، ص ⓒ قيمة ص عندما $س = ١,٥$

الحل

واحدة واحدة

$ص \propto \frac{1}{س}$ هشيل ∝ وأضع $= م$

$ص = \frac{م}{س}$ ← أعوض

عند $ص = ٣$ ، $س = ٢$

$٣ = \frac{م}{٢}$ ← $م = ٦$

∴ $\boxed{ص = \frac{٦}{س}}$ أو $\boxed{س ص = ٦}$

ص عند $س = ١,٥$

$ص = \frac{٦}{١,٥} = ٤$

مهندسة / هنا أحمد

سبحان الله وبحمده سبحان الله العظيم

اللهم صل وسلم على سيدنا محمد

مثال إذا كانت ص ∝ المعكوس الضربي للمقدار $\frac{1}{س^2}$ فأوجد العلاقة بين س ، ص إذا علم أن ص = ٤ عندما س = ٣ ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٩

الحل

أخد بالك هو بيقول ص تتغير مع المعكوس الضربي لل $\left(\frac{1}{س^2}\right)$ ← معكوسه الضربي $س^2$

ص تتغير مع $س^2$

دة تغير طردي مش عكسي

$\therefore$ ص ∝ $س^2$ ← ص = م $س^2$

عند ص = ٤ ، س = ٣

$٤ = م(٣)^2$ ← $م = \frac{٤}{٩}$

$\therefore$ ص = $\frac{٤}{٩}س^2$ عند س = ٩ ← ص = $\frac{٤}{٩} \times (٩)^2 = ٣٦$

مثال إذا كانت $ص^2 ∝ \frac{1}{\sqrt[3]{س}}$ وكانت س = ٨ عندما ص = ٣ أوجد س عندما ص = ١,٥

الحل مهندسة أسما أحمد

$ص^2 ∝ \frac{1}{\sqrt[3]{س}}$

$ص = \frac{م}{\sqrt[3]{س}}$ ← عند س = ٨ ، ص = ٣ $\therefore ٣ = \frac{م}{\sqrt[3]{٨}}$

م = ٢ × ٣ = ٦ $\therefore$ ص = $\frac{٦}{\sqrt[3]{س}}$ أو $\sqrt[3]{س}$ ص = ٦

كدة جبت العلاقة وهي مش مطلوبة

$ص^2 ∝ \frac{1}{\sqrt[3]{س}}$ ← $\frac{ص_1^2}{ص_2^2} = \frac{\sqrt[3]{س_2}}{\sqrt[3]{س_1}}$

بضع المتغيرات زي ما هي موجودة في السؤال سواء كانت $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$ أو $\frac{ص_1^2}{ص_2^2} = \frac{\sqrt[3]{س_2}}{\sqrt[3]{س_1}}$

$\therefore$ $ص_1 = ٣$ ، $س_1 = ٨$ ، $ص_2 = ١,٥$ ، $س_2 = ؟؟$

$\frac{(٣)^2}{(١,٥)^2} = \frac{\sqrt[3]{س_2}}{\sqrt[3]{٨}}$ ← $\sqrt[3]{س_2} = \frac{٩ \times ٢}{(١,٥)^2} = ٨$ بتكعيب الطرفين

$\therefore$ $س_2 = (٨)^3$ ← $س_2 = ٥١٢$

مثال إذا كانت ص تتغير عكسياً مع $\sqrt{س}$ ، ص = ٢ عندما س = ١٦ أوجد ص عندما س = ٣٢

الحل

ص ∝ $\frac{1}{\sqrt{س}}$ ← $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{\sqrt{س_2}}{\sqrt{س_1}}$ ← كمل حل

النوع الثاني

عايز نثبت أن $ص \propto \frac{1}{س}$ ودي هتكون غالباً معطى مقدار ثلاثي مربع تام هحلله

مثال إذا كانت $س^2ص^2 - 6س ص + 9 = صفر$ أثبت أن ص تتغير عكسياً مع س

الحل

$س^2ص^2 - 6س ص + 9 = صفر \leftarrow (س ص - 3)^2 = صفر$ فاكرين التحليل

$\therefore س ص - 3 = صفر \Leftarrow س ص = 3$

$\therefore ص \propto \frac{1}{س}$

مثال إذا كانت $4أ^2ب^2 + 9 = 12أب$ أثبت أ تتغير عكسياً مع ب

الحل

$4أ^2ب^2 - 12أب + 9 = صفر$ كده تام أقدر أحلل

(جذر الأول إشارة النص جذر الأخير)^2

$(2أب - 3)^2 = صفر \Leftarrow 2أب = 3 \leftarrow أب = \frac{3}{2} \leftarrow \boxed{أ = \frac{3}{2ب}}$

$\therefore$ أ تتغير عكسياً مع ب

مثال إذا كان $(\frac{أ}{ص} - \frac{أ}{س}) \propto (س - ص)$ حيث أ ثابت أثبت أن س تتغير عكسياً مع ص

مهندسة أسماء أحمد

الحل

هشتغل واحدة واحدة مع المعطى

$(\frac{أ}{ص} - \frac{أ}{س}) \propto (س - ص) \leftarrow$ هشيل $\propto$ = م

$\frac{أ}{ص} - \frac{أ}{س} = م(س - ص) \leftarrow \frac{أس - أص}{س ص} = م(س - ص)$

$\frac{أ(\cancel{س - ص})}{س ص} = م(\cancel{س - ص}) \Leftarrow أ = م س ص$

$\therefore س ص = \frac{أ}{م}$ حيث أ ثابت ، م ثابت $\therefore \frac{أ}{م}$ ثابت

$\therefore س ص = ثابت \Leftarrow$ س تتغير عكسياً مع ص

النوع الثالث (الجدول)

في التغير الطردي كنت بشوف هل $\frac{ص}{س}$ ثابت ولا لأ
هنا هشوف هل س ص ثابت أم لا طيب لو طلع ماحدش غير كده يبقى لا يمثل تغير طردي ولا عكسي

مثال من بيانات الجدول المقابل
بين نوع التغير بين ص ، س أوجد ثابت التناسب
أوجد قيمة ص عندما س = ٣

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

الحل

أجرب الأول كده أقسم $\frac{ص}{س}$ عشان يكون طردي

$\frac{٦}{٢} = ٣$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ كده مش متساوي تمام

أجرب س ص

$٢ \times ٦ = ١٢$ ، $٤ \times ٣ = ١٢$ ، $٦ \times ٢ = ١٢$ تمام كده

$\therefore$ س ص = ثابت = م $\therefore$ تغير عكسي

ص $\propto \frac{١}{س}$ ⇐ ص = $\frac{م}{س}$ بالتعويض بأي قيم لـ س ، ص أجيب الثابت

عند س = ٢ ، ص = ٦

$٦ = \frac{م}{٢}$ ← م = ١٢ أو على طول م هو الثابت المعروف ١٢

مهندسة/ نجاح محمد

عند س = ٣ ، ص = ؟؟

ص = $\frac{١٢}{س}$ ⇐ ص = $\frac{١٢}{٣}$ $\therefore$ ص = ٤

النوع الرابع

هيكون في معادلة زيادة عن النوع الأول وعايز العلاقة

مثال إذا كانت ص = ٢ + ء وكانت ء تتغير عكسياً مع س وكانت ء = ٥ عند س = ٢ أوجد العلاقة بين س ، ص

الحل هقسم زي الدرس السابق

معادلة	التغير
ص = ٢ + ء	ء $\propto \frac{١}{س}$
ص = ٢ + $\frac{م}{س}$	ء = $\frac{م}{س}$ ← أعوضها
$\boxed{ص = ٢ + \frac{١٠}{س}}$	عند ء = ٥ ، س = ٢ ← م = ١٠ أعوضها

مثال إذا كانت ص = م − ٩ وكانت ص ∝ $\frac{1}{س^2}$ وكانت م = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ أوجد العلاقة بين ص ، س

الحل

ص ∝ $\frac{1}{س^2}$

ص = $\frac{م}{س^2}$

عايز م علشان أعرف أجيب العلاقة طيب أنا عندي م ، س بس هحاول أخلي العلاقة الأولى بين م ، س هشيل ص وأضع $\frac{م}{س^2}$

ص = م − ٩

$\frac{م}{س^2}$ = م − ٩ (أعوض)

عند م = ١٨ ، س = $\frac{٢}{٣}$

$\frac{م}{(\frac{٢}{٣})^2}$ = ١٨ − ٩ = ٩

∴ م = ٩ × $(\frac{٢}{٣})^2$ = ٤

∴ ص = $\frac{٤}{س^2}$

مهندسة / منى أحمد

النوع الخامس

المسائل اللفظية أهم حاجة فهم السؤال وترجمته رياضيًا

مثال إذا كان عدد الساعات (ن) لإنجاز عمل ما يتناسب عكسيًا مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل فإذا أنجز العمل ٦ عمال في ٤ ساعات فما الزمن الذي يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل

الحل

ن ∝ $\frac{1}{س}$

إذا أنجز ٦ عمال العمل في ٤ ساعات

عند $س_1$ = ٦ ، $ن_1$ = ٤

ن = $\frac{م}{س}$ ← بالتعويض

٤ = $\frac{م}{٦}$ ← م = ٢٤ ، $\boxed{ن = \frac{٢٤}{س}}$ ده لو كانت العلاقة مطلوبة

عند $ن_2$ ، $س_2$ = ٨

طيب هو عايز

ن ∝ $\frac{1}{س}$ ← $\frac{ن_1}{ن_2}$ = $\frac{س_2}{س_1}$ ← $\frac{٤}{ن_2}$ = $\frac{٨}{٦}$ ← $ن_2$ = ٣ ساعات

مثال إذا كان مقدار السرعة ع التي يخرج بها الماء من فوهة خرطوم تتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٥١٢٥ عندما نق = ٣ سم

ع = ؟؟ عند نق = ٢٫٥ سم

ع ∝ $\frac{1}{نق^2}$ كمل حل

مثال أكمل (تغير طردي وعكسي)

① إذا كانت ص = $\frac{٣}{٥}$ س فإن ص ∝ ...... س

كانت بشيل ∝ وأضع مكانها = ثابت هنا العكس هيشل = ثابت وأضع ∝ س

② إذا كان س ص = ٥ فإن س ∝ ......

س ص = $\frac{٥}{٢}$ ← س = $\frac{٥}{٢ ص}$ ← س ∝ $\frac{١}{ص}$ أو على طول س ص = ثابت

③ إذا كانت ص ∝ $\frac{٥}{س}$ فإن ص تتغير عكسياً مع س

④ إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت س = $\sqrt{٣٧}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣٧}}$ فإن ثابت التناسب يساوي ......

ص ∝ $\frac{١}{س}$ ← عايز ثابت التناسب (م)

اكتب العلاقة وأعوض عند س = $\sqrt{٣٧}$ ، ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣٧}}$

∴ ص = $\frac{م}{س}$ بالتعويض ← $\frac{٢}{\sqrt{٣٧}} = \frac{م}{\sqrt{٣٧}}$ ← م = $\frac{٢\cancel{\sqrt{٣٧}}}{\cancel{\sqrt{٣٧}}}$ = ٢

⑤ أختر

① إذا كانت س²ص² + $\frac{١}{٤}$ = س ص فإن ......

ص ∝ س ، ص ∝ س² ، $\boxed{ص ∝ \frac{١}{س}}$ ، ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$

س²ص² − س ص + $\frac{١}{٤}$ = صفر ← (س ص − $\frac{١}{٢}$)² ← س ص = $\frac{١}{٢}$

∴ ص ∝ $\frac{١}{س}$

② إذا كانت ص = ٣ س − ٦ فإن ص ∝ ......

س ، ٣ س ، $\boxed{س − ٢}$ ، ٣ س − ٦

ص = ٣ (س − ٢) ← ص = ثابت (س − ٢) ← ص ∝ (س − ٢)

③ إذا كانت ص² + ٤ س² = ٤ س ص فإن ......

$\boxed{ص ∝ س}$ ، ص ∝ ٤ س ، ص ∝ $\frac{١}{س}$ ، ص ∝ $\frac{١}{٤ س}$

ص² − ٤ س ص + ٤ س² = صفر ← (ص − ٢ س)² = صفر ← ص = ٢ س

④ أي مما يأتي يمثل علاقة طردية بين ص ، س

س ص = ٥ ، ص = س + ٣ ، $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ ، $\boxed{\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٣}}$

عكسي ، طردي بين ص مع (س + ٣) ، دي عكسي س ص = ١٢ ، دي ص = $\frac{٣ س}{٥}$ طردي